

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Zvezni regulacijski sistemi –
primeri frekvenčne analize in sinteze
sistemov vodenja

Igor Škrjanc

Ljubljana, 2006

Predgovor

Učbenik Zvezni regulacijski sistemi - Primeri frekvenčne analize in sinteze sistemov vodenja dopolnjuje in nadgrajuje temetiko učbenika Zvezni regulacijski sistemi - II. del in zaokrožuje problematiko, ki je temeljna za razumevanje regulacijskih sistemov. V učbeniku obravnavamo osnovne metode analize in sinteze regulacijskih sistemov v frekvenčnem prostoru in njihovo uporabo v najrazličnejših primerih. Metode, ki jih obravnavamo so klasične metode pri inženirskem načrtovanju regulacijskih sistemov, pa so z razvojem sodobnih paketov za računalniško podprto načrtovanje postale še bolj uporabne.

Delo je razdeljeno na štiri poglavja. Prvo poglavje obravnava analizo regulacijskih sistemov s pomočjo diagrama lege korenov, ki nam omogoča hitro razumevanje zaprtizančne dinamike sistema pri spremenljivih parametrih.

V drugem poglavju obravnavamo metode, ki temeljijo na poznavanju frekvenčne karakteristike sistema. Opisali smo Bodejev diagram in polarni diagram. Obravnavamo pa tudi absolutno in relativno stabilnost regulacijskih sistemov s pomočjo Nyquistovega diagrama ter s pomočjo ojačevalnega in faznega razločka.

Tretje poglavje je namenjeno kompenzacijskim metodam za načrtovanje regulacijskih sistemov. Podali smo metode prehitevalne in zakasnilne kompenzacije s pomočjo diagrama lege korenov in s pomočjo Bodejevega diagrama.

V četrtem poglavju obravnavamo metode analize in sinteze regulacijskih sistemov v prostoru stanj. Obdelali smo nekaj metod za načrtovanje regulatorjev stanj in observatorjev. Predstavljena je tudi metoda načrtovanja regulatorja stanj za odziv na referenčni signal.

Učebnik vsebuje številne primere analize in sinteze regulacijskih sistemov. Primeri so izvedeni analitično ali pa s pomočjo programskega paketa matlab. Značilni primeri so označeni s trikotnikom (Δ). Njihova rešitev je prikazana v celoti. Pri ostalih primerih pa so podani samo rezultati.

Na koncu se zahvaljujem sodelavcem, ki so pripomogli k nastanku tega dela. Zahvaljujem se prof. dr. Borutu Zupančiču, ki predava tematiko zveznih regulacijskih sistemov in je bil pobudnik za nastanek učbenika. Posebno zahvalo sem dolžan Gregorju Cijan, študentu avtomatike, ki je v okolju L^AT_EX oblikoval tekst in narisal slike. Zahvala gre tudi Simonu Oblaku, univ. dipl. ing. in Gorazdu Karerju, univ. dipl. ing. za pregled rokopisa in koristne napotke.

Ljubljana, december 2004

Igor Škrjanc

Kazalo

1. Metoda diagrama lege korenov	1
1.1 Osnovna ideja diagrama lege korenov	1
1.2 Pravila za risanje diagrama lege korenov	2
1.3 Naloge	3
2. Analiza sistemov v frekvenčnem prostoru	33
2.1 Bodejev diagram	33
2.1.1 Bodejevi diagrami osnovnih členov	36
2.1.2 Naloge	42
2.2 Polarni diagram	57
2.2.1 Polarni diagrami osnovnih členov	58
2.2.2 Splošne značilnosti polarnih diagramov	61
2.2.3 Naloge	62
2.3 Stabilnost regulacijskih sistemov	71
2.3.1 Nyquistov stabilnostni kriterij	72
2.3.2 Relativna stabilnost	80
2.3.3 Naloge	81
3. Kompenzacijske metode za načrtovanje regulacijskih sistemov	108
3.1 Osnove kompenzacijskih metod	108
3.1.1 Načrtovanje prehitevalnega kompenzatorja s pomočjo dia- grama lege korenov	109
3.1.2 Načrtovanje prehitevalnega kompenzatorja s pomočjo Bodejevega diagrama	110

3.1.3	Načrtovanje zakasnilnega kompenzatorja s pomočjo diagrama lege korenov	112
3.1.4	Načrtovanje zakasnilnega kompenzatorja s pomočjo Bodejevega diagrama	113
3.1.5	Naloge	123
4.	Analiza in sinteza sistemov v prostoru stanj	140
4.1	Načrtovanje regulatorja stanj	140
4.1.1	Načrtovanje regulatorja stanj s pomočjo Ackermannove formule	143
4.2	Načrtovanje observatorja stanj	147
4.2.1	Povzetek	152
4.3	Sistemi z referenčno vrednostjo	156
4.3.1	Regulator stanj pri referenčni spremenljivki in izhodu sistema kot linearni kombinaciji stanj	157
4.4	Naloge	158
	Literatura	178

1. Metoda diagrama lege korenov

Metoda diagrama lege korenov omogoča izračun korenov zaprtozančnega sistema na osnovi poznavanja odprtozančne prenosne funkcije. Obravnavamo pristop, ki omogoča določanje zaprtozančnih polov pri spremenljivem sistemskem parametru. V vodenju je obravnavani sistemski parameter največkrat ojačenje sistema K , ki se spreminja od 0 do ∞ . V primeru, ko gre K od 0 do $-\infty$ govorimo o komplementarnem diagramu lege korenov, če pa se spreminja kateri o drugih parametrov pa o konturnem diagramu.

1.1 Osnovna ideja diagrama lege korenov

Pri diagramu lege korenov gre za reševanje enačbe, ki jo pogosto srečamo v primeru dinamičnih povratnozančnih sistemov in jo imenujemo karakteristična enačba.

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

Enačba (1.1) je kompleksna, jo lahko rešujemo tako, da jo razdelimo na njen absolutni del in kotni del. Prva enačba določa **pogoj absolutne vrednosti**.

$$|G(s)H(s)| = 1$$

Druga enačba pa določa **kotni pogoj**.

$$\angle[G(s)H(s)] = \pm 180^\circ(2k + 1) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Če rišemo komplementarni diagram lege korenov za $K < 0$, potem absolutni pogoj ostane enak kot v primeru $K > 0$. Kotni pogoj pa se premakne za 180° .

$$\angle[G(s)H(s)] = \pm 180^\circ(2k) \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Vrednosti spremenljivke s , ki zadovoljijo pogoj absolutne vrednosti in kotni pogoj, so koreni karakteristične enačbe oziroma zaprtozančni poli in ležijo na diagramu lege korenov.

1.2 Pravila za risanje diagrama lege korenov

V nadaljevanju bomo podali pravila za risanje DLK.

1. Napišemo karakteristično enačbo $1 + G(s)H(s) = 0$ v faktorizirani obliki.

$$1 + G(s)H(s) = 1 + \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = 0$$

m je število končnih ničel odprtozančnega sistema, n je število končnih polov odprtozančnega sistema.

2. Poiščemo začetne in končne točke DLK in določimo število vej. Začetne točke ($K = 0$):

$$\lim_{K \rightarrow 0} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow 0} \frac{1}{K} = \infty.$$

Končne točke ($K \rightarrow \infty$):

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \right| = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{1}{K} = 0.$$

DLK ima natanko toliko vej, kolikor je korenov karakteristične enačbe. Ker je pri realnih sistemih $n \geq m$, je število vej tudi enako številu odprtozančnih polov n .

3. Določimo segmente DLK na realni osi.

Veljati mora kotni pogoj. Velja pravilo: *določena točka na realni osi pripada DLK, če je skupno število realnih odprtozančnih polov in ničel desno od te točke liho število.* V primeru komplementarnega diagrama velja pravilo: *določena točka na realni osi pripada DLK, če je skupno število realnih odprtozančnih polov in ničel desno od te točke sodo število.*

4. Določimo asimptote.

Število asimptot je enako številu ničel v neskončnosti in je enako $n - m$. Asimptote se sekajo pod koti:

$$\angle[G(s)H(s)] = -(n - m)\beta_K = \pm 180^\circ(2k + 1)$$

$$\beta_k = \frac{\mp 180^\circ(2k+1)}{n-m}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-m-1).$$

Asimptote se sekajo v točki σ_x na realni osi:

$$\sigma_x = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = \frac{\sum \text{poli} - \sum \text{ničle}}{n-m}$$

5. Določimo razcepišča v DLK (σ_b).

Razcepišča v DLK se pojavijo na tistih mestih, kjer nastopijo *večkratni koreni* karakteristične enačbe.

$$\left. \frac{dK}{ds} \right|_{s=\sigma_b} = 0 \quad \Rightarrow \sigma_b$$

6. Določimo izhodne in vstopne kote.

Izhodni kot iz kompleksnega pola podaja enačba

$$\Theta_{out} = 180^\circ + \sum_i \Phi_i - \sum_i \Theta_i,$$

vstopni kot v kompleksno ničlo podaja pa enačba

$$\Phi_{in} = 180^\circ - \sum_i \Phi_i + \sum_i \Theta_i,$$

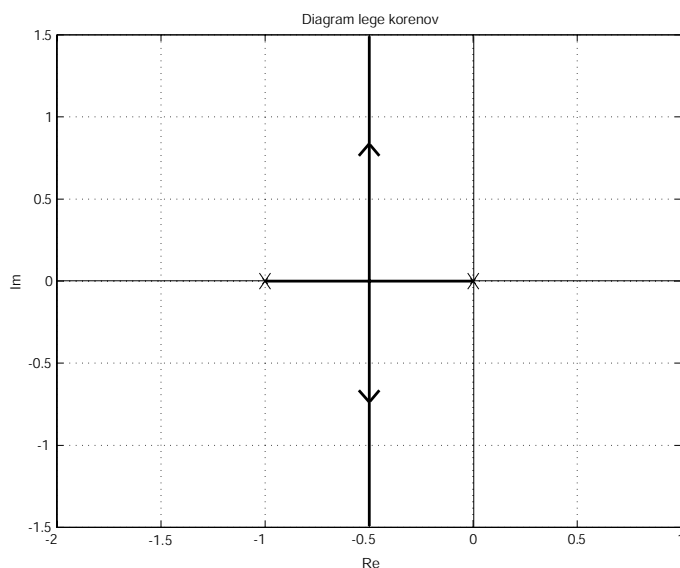
kjer je so koti Θ_i koti od vseh polov in Φ_i kot od vseh ničel.

1.3 Naloge

Primer 1.1. $\triangle$ Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)}.$$

Narišite DLK za $K > 0$.



Slika 1.1: Rešitev primera 1.1

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.1.

Število polov (p_i): $n = 2$;

število ničel (z_i): $m = 0$;

število asimptot: $n - m = 2$.

Kot, ki ga oklepa asimptota z realno osjo:

$$\beta = \frac{(2l + 1) \cdot 180^\circ}{n - m}; \quad l = 0, 1, \dots, (n - m - 1);$$

$$\beta_1 = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ \quad \beta_2 = \frac{3 \cdot 180^\circ}{2} = 270^\circ.$$

Presečišče asimptot:

$$\sigma_x = -\frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m};$$

$$\sigma_x = -\frac{0 + 1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Razcepišče:

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_b + p_i} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_b + z_i};$$

$$\frac{1}{\sigma_b + 0} + \frac{1}{\sigma_b + 1} = 0 \Rightarrow 2\sigma_b + 1 = 0 \Rightarrow \sigma_b = -\frac{1}{2}.$$

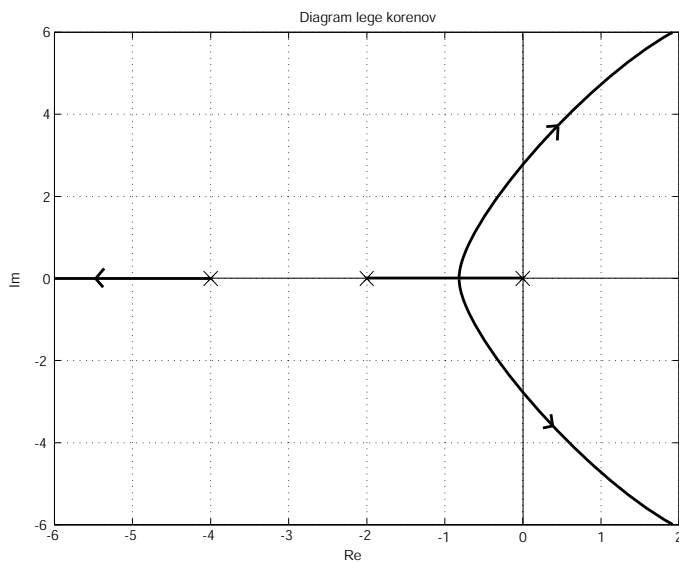
Primer 1.2. $\triangle$ Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}.$$

Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.2.



Slika 1.2: Rešitev primera 1.2

Število polov (p_i): $n = 3$;

število ničel (z_i): $m = 0$;

število asimptot: $n - m = 3$;

kot, ki ga oklepa asimptota z realno osjo: $\beta_1 = 60^\circ$, $\beta_2 = 180^\circ$, $\beta_3 = 300^\circ$.

Presečišče asimptot: $\sigma_x = -\frac{0+2+4}{3} = -2$.

Razcepišče:

$$\frac{1}{\sigma_b + 0} + \frac{1}{\sigma_b + 2} + \frac{1}{\sigma_b + 4} = 0 \Rightarrow 3\sigma_b^2 + 12\sigma_b + 8 = 0;$$

$$\sigma_{b_1} = -0,84; \sigma_{b_2} = -3,15.$$

Razcepišče je samo v točki $\sigma_{b_1} = -0,84$, v točki $\sigma_{b_2} = -3,15$ pa ne, ker ta ne leži na DLK-ju.

Presečišče z imaginarno osjo določimo iz Routhove tabele.

$$s^3 + 6s^2 + 8s + K = 0$$

s^3	1	8	0
s^2	6	K	0
s^1	$8 - \frac{K}{6}$	0	0
s^0	K	0	0

Kritično ojačenje določimo iz prvega stolpca Routhove tabele: $0 < K < 48$.

Iz vrstice pri s^2 sledi ($K = 48$): $6s^2 + 48 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j2,83$, $\omega_\pi = 2,83$.

Primer 1.3. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+4)}.$$

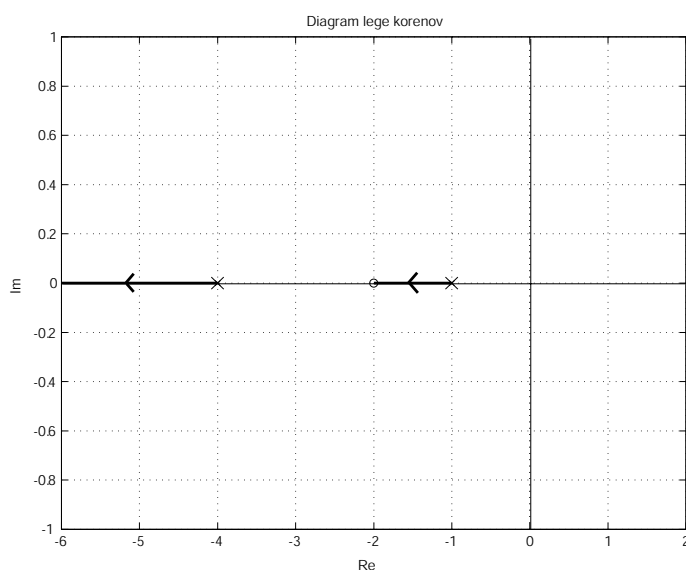
Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.3.

$$n = 2, m = 1, n - m = 1$$

$$\beta_1 = 180^\circ$$



Slika 1.3: Rešitev primera 1.3

Primer 1.4. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+3)(s^2+2s+2)}.$$

Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.4.

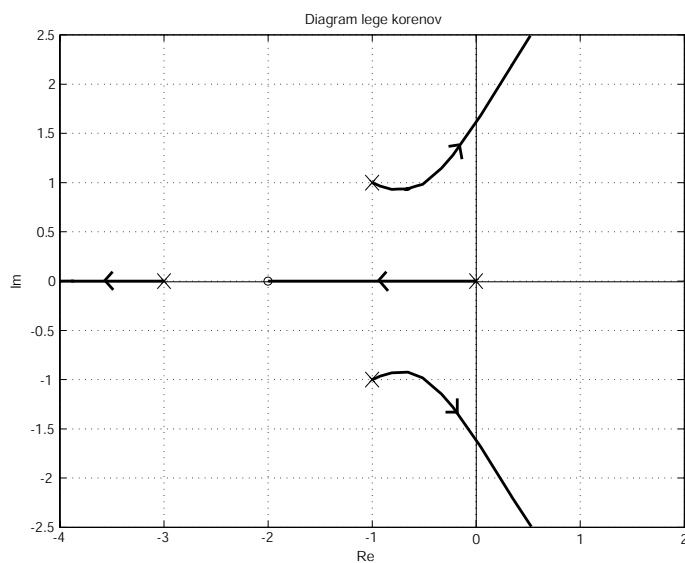
$$n = 4, m = 1, n - m = 3$$

$$\beta_{1,2,3} = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$$

$$\sigma_x = -1$$

$$\phi_{izh1} = 180^\circ + [45^\circ - 90^\circ - 26,6^\circ - 135^\circ] = -26,6^\circ$$

s^4	1	8	$2K$	$0 < K < 7$
s^3	5	$K + 6$	0	
s^2	$\frac{34-K}{5}$	$2K$	0	
s^1	$\frac{K^2+22K-204}{K-34}$	0	0	
s^0	$2K$	0	0	



Slika 1.4: Rešitev primera 1.4

Mejni primer: $K_{kr} = 7 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j1.61$.

Primer 1.5. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K}{s^2 + 2s + 2}.$$

Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

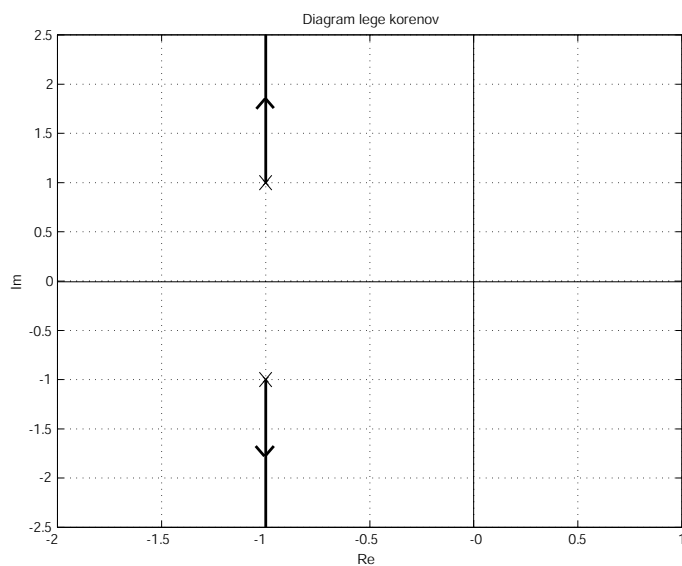
DLK je prikazan na sliki 1.5.

$$n = 2, m = 0, n - m = 2$$

$$\beta_{1,2} = 90^\circ, 270^\circ$$

$$\sigma_x = -1$$

$$\phi_{izh} = 180^\circ + [-90^\circ] = 90^\circ$$



Slika 1.5: Rešitev primera 1.5

s^2	1	$2 + K$	$K > -2$
s^1	2	0	
s^0	$2 + K$	0	

Iz slike 1.5 je razvidno, da je sistem stabilen za vse pozitivne K .

Primer 1.6. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2 + 2s + 2)}.$$

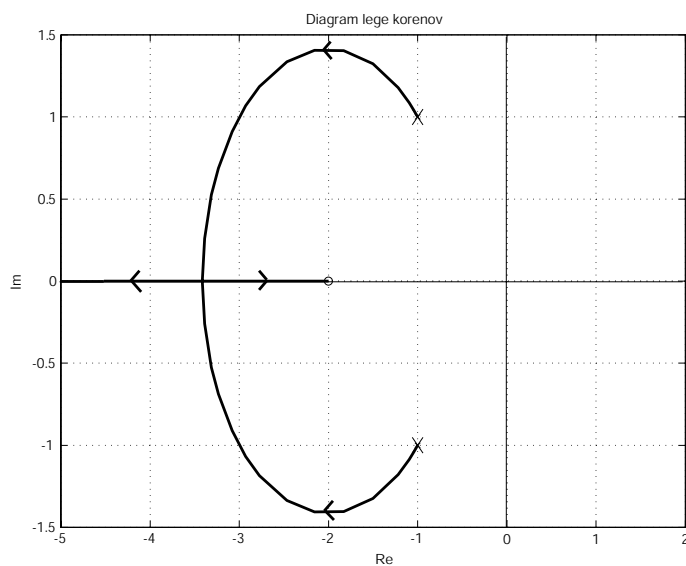
Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.6.

$$n = 2, m = 1, n - m = 1$$

$$\beta_1 = 180^\circ$$



Slika 1.6: Rešitev primera 1.6

$$\phi_{izh1} = 180^0 + [45^0 - 90^0] = 135^0$$

Razcepišče:

$$\frac{1}{\sigma_b+1+j} + \frac{1}{\sigma_b+1-j} = \frac{1}{\sigma_b+2} \Rightarrow \sigma_b^2 + 4\sigma_b + 2 = 0;$$

$$\sigma_{b1,2} = -2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow -3,41.$$

Primer 1.7. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)}.$$

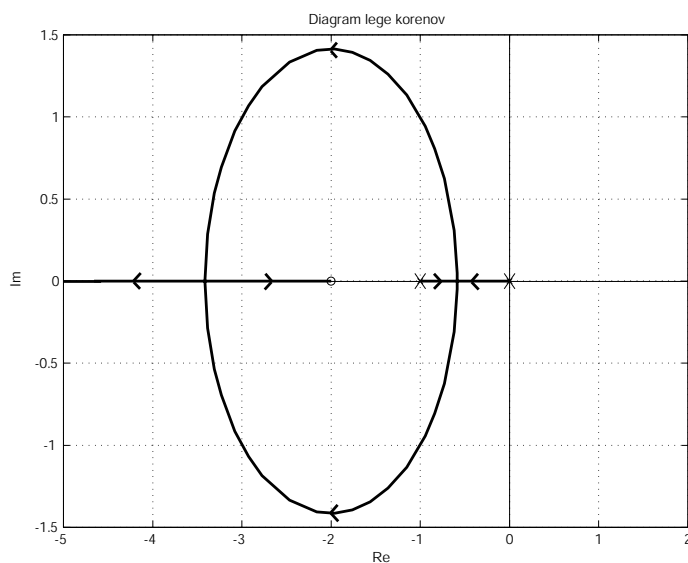
Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.7.

$$n = 2, m = 1, n - m = 1$$

$$\beta_1 = 180^0$$



Slika 1.7: Rešitev primera 1.7

Razcepišče:

$$\frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b+1} = \frac{1}{\sigma_b+2} \Rightarrow \sigma_b^2 + 4\sigma_b + 2 = 0;$$

$$\sigma_{b_{1,2}} = -2 \pm \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_{b_1} = -3,41, \sigma_{b_2} = -0,586.$$

Primer 1.8. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{Ks(s+1)}{s^2 + 4s + 5}.$$

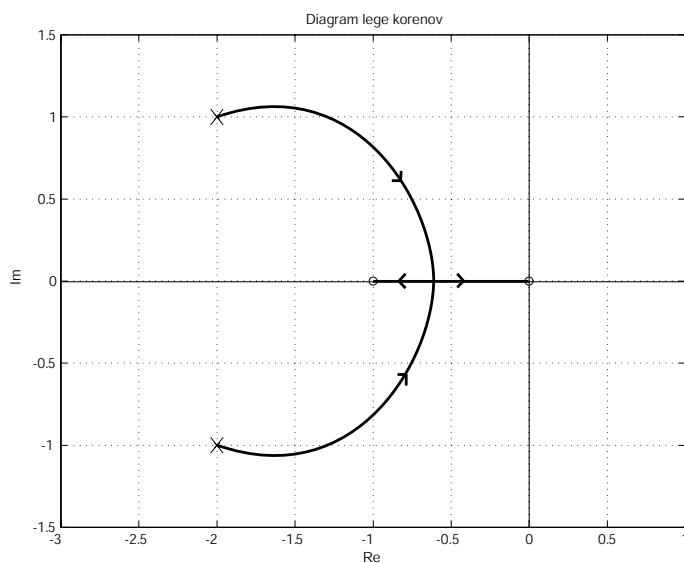
Narišite DLK za $K > 0$.

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.8.

$$n = 2, m = 2, n - m = 0$$

$$\phi_{izh1} = 180^0 + [135^0 + 154,4^0 - 90^0] = 378,4^0 \Rightarrow \phi_{izh1} = 18,4^0$$



Slika 1.8: Rešitev primera 1.8

Razcepišče:

$$\frac{1}{\sigma_b+2+j} + \frac{1}{\sigma_b+2-j} = \frac{1}{\sigma_b} + \frac{1}{\sigma_b+1} \Rightarrow 3\sigma_b^2 + 10\sigma_b + 5 = 0;$$

$$\sigma_{b1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{40}}{6} \Rightarrow \sigma_{b1} = -0,613.$$

Primer 1.9. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s^2 + 2s + 2)}{s^2(s + 2)}.$$

Narišite DLK za $K > 0$.

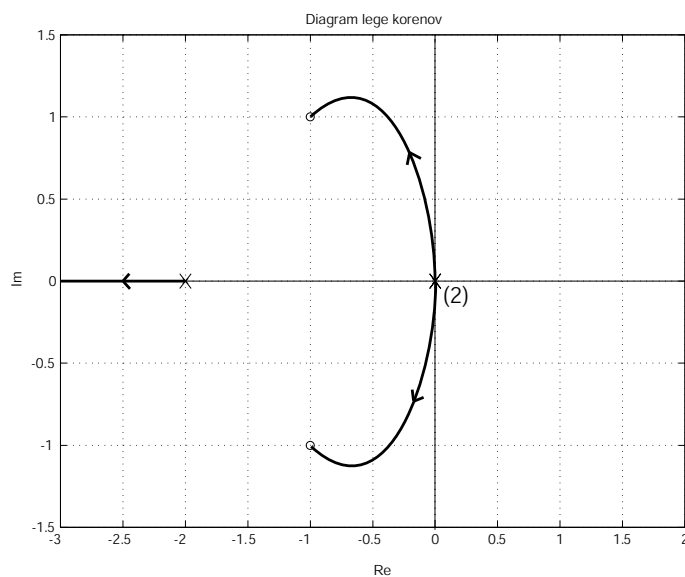
Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.9.

$$n = 3, m = 2, n - m = 1$$

$$\beta_1 = 180^\circ$$

$$\phi_{vh1} = 180^\circ - [90^\circ - 2 \cdot 135^\circ - 45^\circ] = 45^\circ$$



Slika 1.9: Rešitev primera 1.9

Primer 1.10. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+2)}.$$

Narišite DLK za $K > 0$ in $K < 0$.

Rešitev

(a) $K > 0$

DLK je prikazan na sliki 1.10.

$$n = 2, m = 1, n - m = 1$$

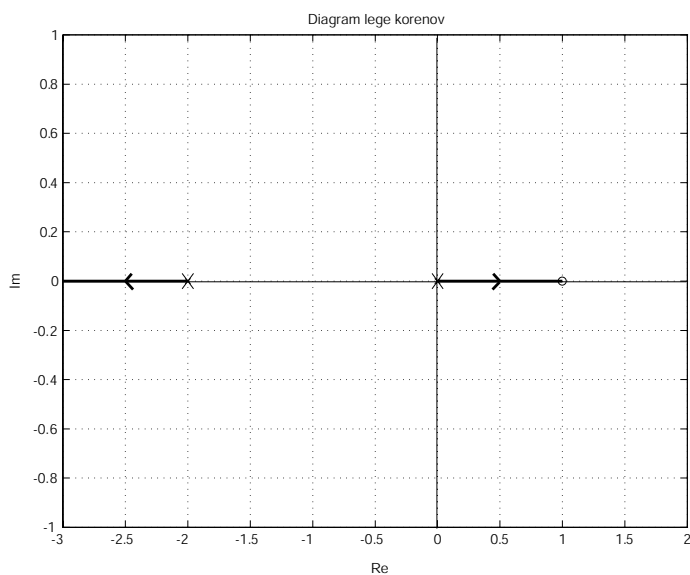
$$\beta_1 = 180^\circ$$

(b) $K < 0$

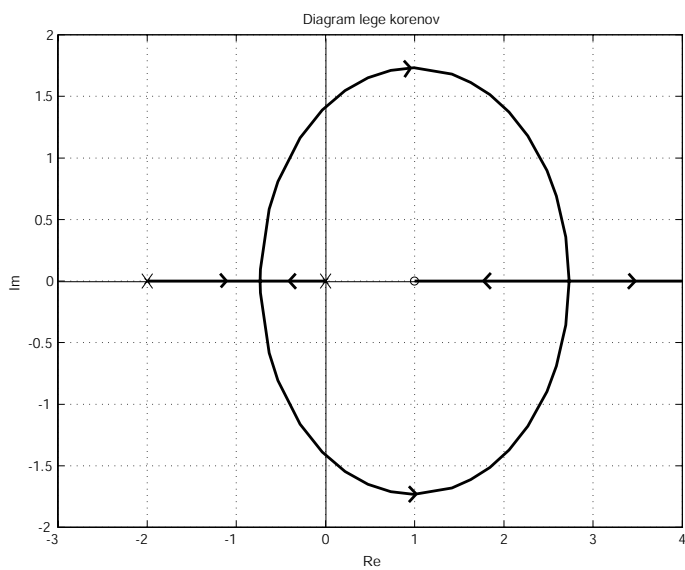
DLK je prikazan na sliki 1.11.

$$n = 2, m = 1, n - m = 1$$

$$\beta_1 = 0^\circ$$



Slika 1.10: Rešitev primera 1.10a



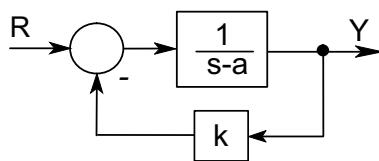
Slika 1.11: Rešitev primera 1.10b

Razcepišče:

$$\frac{K(s-1)}{s(s+2)} + 1 = 0 \Rightarrow K = \frac{-s^2 - 2s}{s-1};$$

$$\left. \frac{dK}{ds} = \frac{-s^2 + 2s + 2}{(s-1)^2} \right|_{s=\sigma_b} = 0 \Rightarrow \sigma_{b1,2} = 1 \pm \sqrt{3}.$$

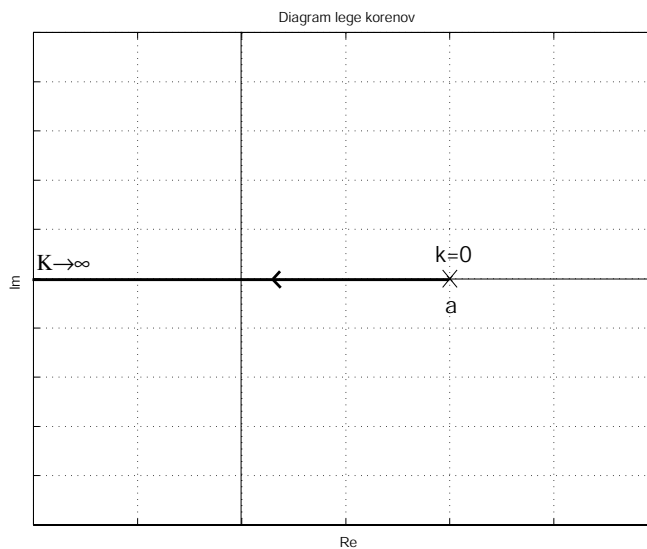
Primer 1.11. Narišite DLK za sistem prikazan na sliki 1.12 ($a > 0$).



Slika 1.12: Bločni diagram iz primera 1.11

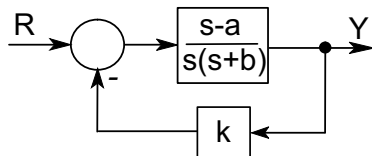
Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.13.



Slika 1.13: Rešitev primera 1.11

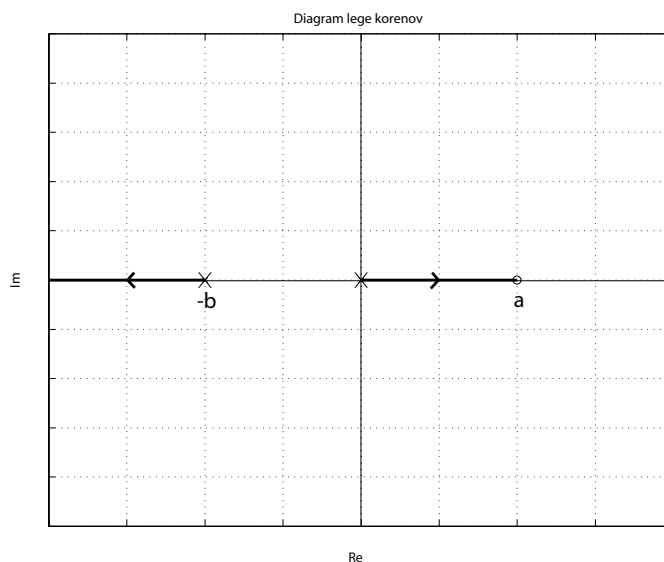
Primer 1.12. Narišite DLK za sistem prikazan na sliki 1.14. ($a, b > 0$)



Slika 1.14: Bločni diagram iz primera 1.12

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.15.

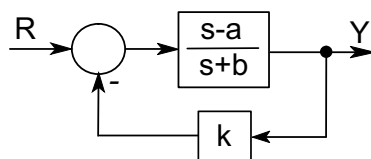


Slika 1.15: Rešitev primera 1.12

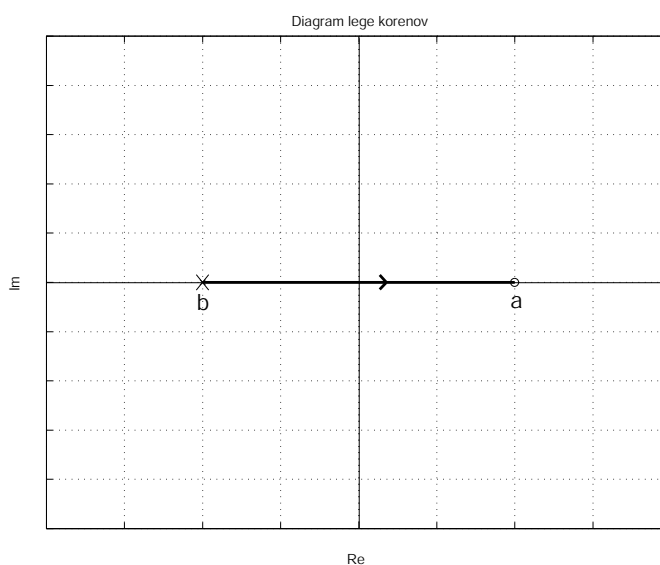
Primer 1.13. Narišite DLK za sistem prikazan na sliki 1.16 ($a, b > 0$).

Rešitev

DLK je prikazan na sliki 1.17.



Slika 1.16: Bločni diagram iz primera 1.13



Slika 1.17: Rešitev primera 1.13

Primer 1.14. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}; \quad 0 \leq K \leq \infty.$$

Ugotovi katere od spodaj navedenih točk ležijo na DLK-ju. Za tiste, ki to velja, določite ojačenje K .

(a) $s = -0,5$

(b) $s = 1,5$ (nestabilna)

(c) $s = j1,414$

(d) $s = -1 + j$

(e) Preverite točke (a), (b), (c) in (d) z uporabo Matlaba.

Rešitev

Točke, ki izpolnjujejo kotni pogoj ($\angle[G(s)H(s)] = \pm 180^\circ(2k+1)$; $k = 0, 1, 2, \dots$) ležijo na DLK-ju. Ojačenje v teh točkah pa dobimo iz pogoja absolutne vrednosti ($|G(s)H(s)| = 1$).

(a) Leži, $K = 0,38$.

(b) Ne leži.

(c) Leži, $K = 6$.

(d) Ne leži.

(e) Matlab.

Primer 1.15. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+2)} \quad 0 \leq K \leq \infty.$$

(a) Ugotovi katere od spodaj navedenih točk ležijo na DLK-ju. Za tiste, ki to velja, določite ojačenje K .

(1) $s = -0,5$

(2) $s = 1,5$ (nestabilna)

(3) $s = j1,414$

(4) $s = -1 + j$

(b) Izračunaj časovne konstante zaprtozančnih polov pri $K \rightarrow \infty$.

(c) Za primere iz naloge (a) preverite rezultate s uporabo Matlaba.

Rešitev

(a) $K = -\frac{1}{G(s)} = -\frac{s^2(s+2)}{s+1}$

(1) $K = -\frac{(-0,5)^2(-0,5+2)}{-0,5+1} = -0,75$, ne leži.

(2) $K = -\frac{(1,5)^2(3,5)}{2,5+1} = -3,15$, ne leži.

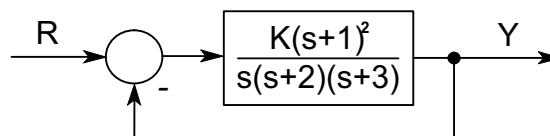
(3) $K = -\frac{(j1,414)^2(2+j1,414)}{1+j1,414} = 2,828\angle -19,47^\circ$, ne leži.

$$(4) K = -\frac{(-1+j1)^2(1+j1)}{j1} = 2,828\angle 45^0, \text{ ne leži.}$$

$$(b) \sigma_a = -\frac{1}{2}; K \rightarrow \infty, \text{ zaprtozančni koreni } s_{1,2} = -\frac{1}{2} + j\infty, s_3 = -1; \tau_{1,2} = 2, \tau_3 = 1.$$

(c) Matlab.

Primer 1.16. Predpostavimo zaprtozančni sistem na sliki 1.18.



Slika 1.18: Bločni diagram iz primera 1.16

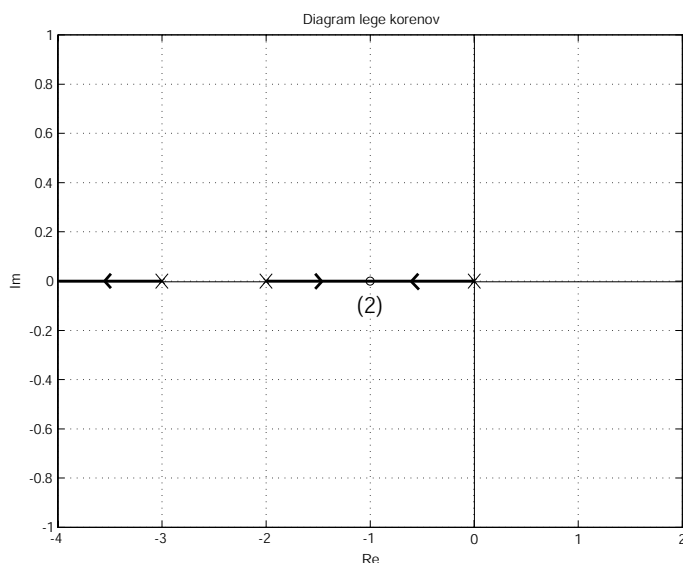
- (a) Narišite DLK za sistem na sliki 1.18.
- (b) Dokaži, da točka $s = -1,5$ leži na DLK-ju.
- (c) Dokaži, da točka $s = -2,5$ ne leži na DLK-ju.
- (d) Preverite narisan DLK iz točke (a) z uporabo Matlaba.

Rešitev

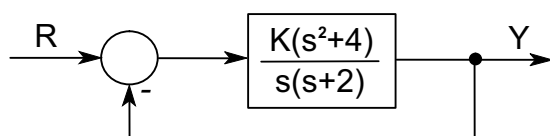
- (a) DLK je prikazan na sliki 1.19.
- (b) $\angle[G(s)H(s)] = 180^0$, kotni pogoj je izpolnjen.
- (c) $\angle[G(s)H(s)] = 0^0$, kotni pogoj ni izpolnjen.
- (d) Matlab.

Primer 1.17. Predpostavimo sistem na sliki 1.20.

- (a) Narišite DLK ter določite območje ojačenja K ($0 < K < \infty$), kjer je sistem stabilen.



Slika 1.19: Rešitev primera 1.16a



Slika 1.20: Bločni diagram iz primera 1.17

- (b) Preverite rezultat dobljen pod točko (a) z uporabo Routhovega kriterija.
- (c) Določite območje ojačenja K ($K > 0$) tako, da bodo vsi koreni karakteristične enačbe realni.
- (d) Določite vrednost K tako, da bo sistem kritično dušen.
- (e) Preverite narisan DLK iz točke (a) in (c) z uporabo Matlaba.

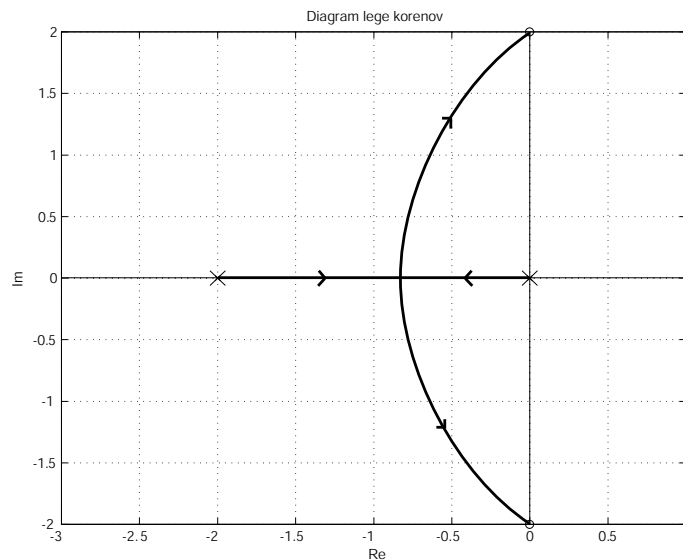
Rešitev

- (a) DLK je prikazan na sliki 1.21. Sistem je stabilen za vsak $K > 0$.

(b)

s^2	$K + 1$	$4K$
s^1	2	0
s^0	$4K$	0

$K > -1$



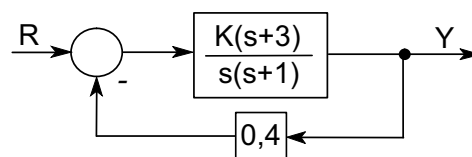
Slika 1.21: Rešitev primera 1.17a

(c) $0 < K < 0,207$

(d) Sistem je kritično dušen, če so koreni realni in enaki: $K = 0,207$.

(e) Matlab. Uporabite ukaz **rlocus**.

Primer 1.18. Predpostavimo sistem na sliki 1.22.



Slika 1.22: Bločni diagram iz primera 1.18

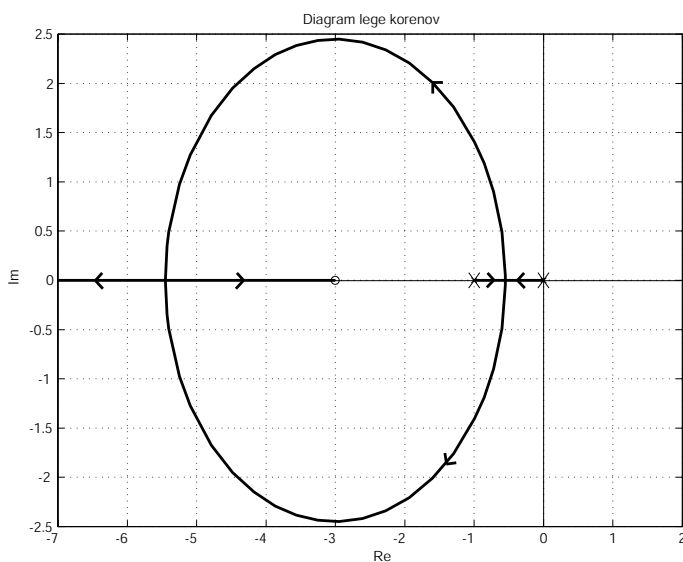
(a) Narišite DLK ter določite območje ojačenja K ($0 < K < \infty$), kjer je sistem stabilen.

(b) Preverite rezultat dobljen pod točko (a) s uporabo Routhovega kriterija.

- (c) Določite območje ojačenja K ($K > 0$) tako, da bodo vsi koreni karakteristične enačbe realni.
- (d) Določite vrednosti ojačenja K tako, da bo sistem kritično dušen.
- (e) Preverite narisano DLK iz točke (a) z uporabo Matlaba.

Rešitev

- (a) DLK je prikazan na sliki 1.23. Sistem je stabilen za vsak $K > 0$. Razcepišča: $\sigma_1 = -0,55$, $\sigma_2 = -5,45$.



Slika 1.23: Rešitev primera 1.18a

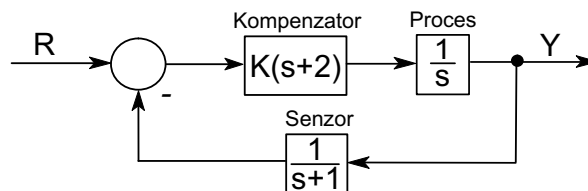
(b)	s^2	1	$1,2K$	$K > -2,5$
	s^1	$0,4K + 1$	0	
	s^0	$1,2K$	0	

(c) $0 < K < 0,25$ in $24,75 < K < \infty$.

(d) $K = 0,25$ in $K = 24,75$.

(e) Matlab.

Primer 1.19. Dan imamo sistem na sliki 1.24, ki je sestavljen iz PD-kompensatorja in senzorja s svojo dinamiko.



Slika 1.24: Bločni diagram iz primera 1.19

- Narišite DLK ter določite območje ojačenja K ($0 < K < \infty$), kjer je sistem stabilen.
- Preverite rezultat dobljen pod točko (a) z uporabo Routhovega kriterija.
- Določite območje ojačenja K ($K > 0$) tako, da bodo vsi koreni karakteristične enačbe realni.
- Določite vrednost K tako, da bo sistem kritično dušen.
- Preverite narisan DLK iz točke (a) z uporabo Matlaba.

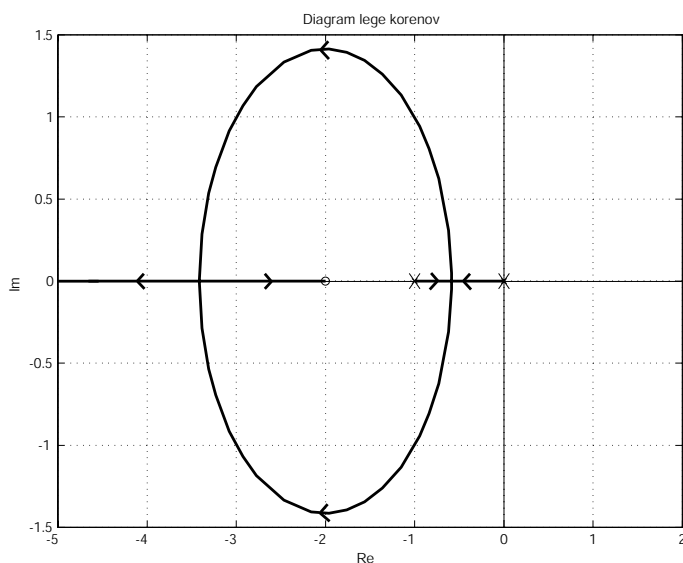
Rešitev

- DLK je prikazan na sliki 1.25. Sistem je stabilen za vsak $K > 0$.

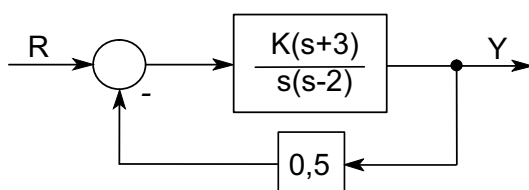
$$(b) \begin{array}{c|cc} s^2 & 1 & 2K \\ s^1 & K+1 & 0 \\ s^0 & 2K & 0 \end{array} \quad K > -1$$

- $0 < K < 0,17$ in $5,83 < K < \infty$.
- $K = 0,17$ in $K = 5,83$.
- Matlab.

Primer 1.20. Predpostavimo sistem na sliki 1.26, ki vsebuje senzor z lastnim ojačenjem.



Slika 1.25: Rešitev primera 1.19a

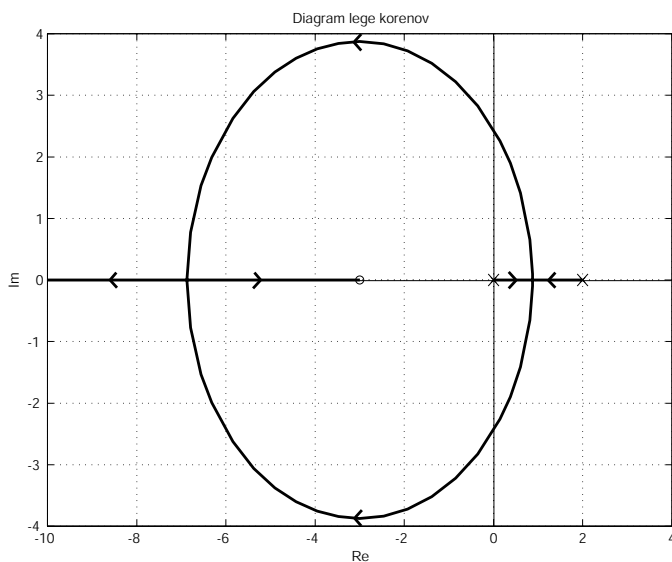


Slika 1.26: Bločni diagram iz primera 1.20

- (a) Narišite DLK za $K > 0$.
- (b) S pomočjo Routhovega kriterija določite točke, kjer DLK seka imaginarno os.
- (c) S pomočjo točk (a) in (b) določite območje ojačenja (K), kjer je sistem stabilen.
- (d) S pomočjo točk (a) in (b) določite območje ojačenja (K), kjer je sistem stabilen in hkrati so poli zaprtozančne prenosne funkcije realni.
- (e) Iz dosedanjih rezultatov določite vse vrednost K -ja za katere velja, da je sistem kritično dušen.
- (f) Preverite narisan DLK iz točke (a) z uporabo Matlaba.

Rešitev

- (a) DLK za $K > 0$ je prikazan na sliki 1.27. Razcepišča: $\sigma_1 = 0,873$, $\sigma_2 = -6,87$.



Slika 1.27: Rešitev primera 1.20a

(b)	$s^2 \quad 1 \quad 1,5K$	$K = 4 \quad s = \pm j\sqrt{6} \approx \pm j2,45$
	$s^1 \quad 0,5K - 2 \quad 0$	
	$s^0 \quad 1,5K \quad 0$	

- (c) $K > 4$
- (d) $K > 31,5$
- (e) $K = 31,5$
- (f) Matlab. Uporabite ukaz **rlocus**.

Primer 1.21. Skicirajte DLK-je za dane odprtozančne prenosne funkcije in določite presečišča z imaginarno osjo.

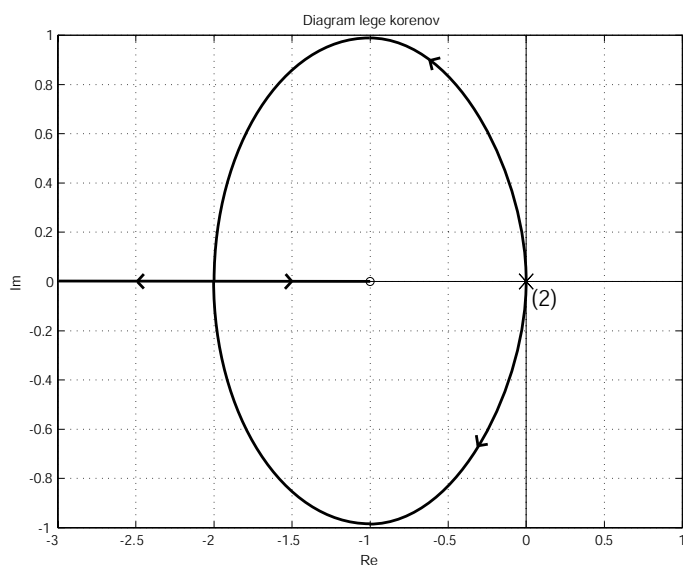
(a) $\frac{K(s+1)}{s^2}$

$$(b) \frac{K}{s(s+2)^2}$$

$$(c) \frac{K}{s[(s+10)^2+1]}$$

$$(d) \frac{K}{s[(s+5)^2+25]}$$

Rešitev



Slika 1.28: Rešitev primera 1.21a

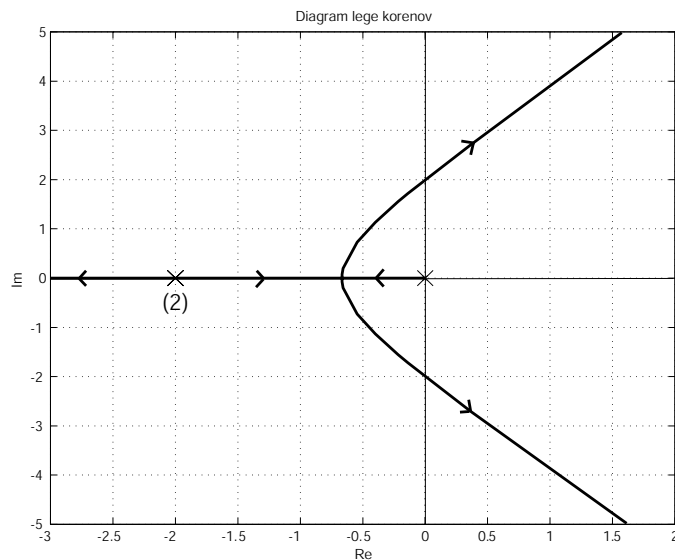
(a) DLK je prikazan na sliki 1.28.

Imaginarno os seka v točki: $s = 0$. Razcepišči: $\sigma_1 = -2$, $\sigma_2 = -\frac{2}{3}$.
 $\sigma_a = -\frac{4}{3}$.

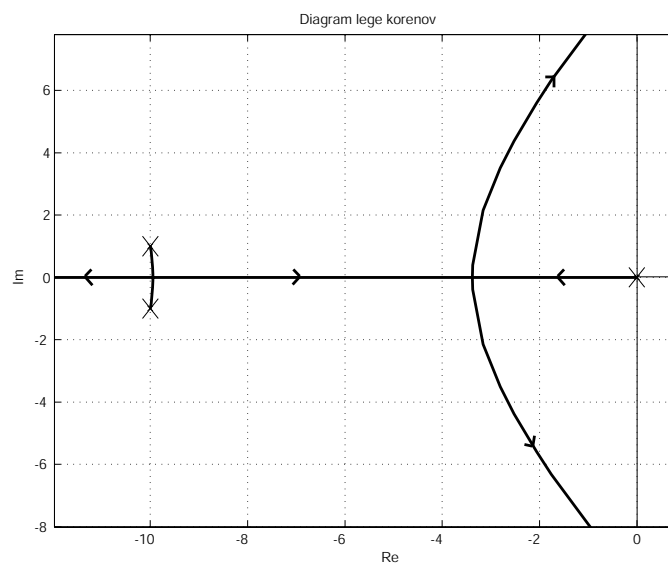
(b) DLK je prikazan na sliki 1.29.

s^3	1	4
s^2	4	K
s^1	$\frac{16-K}{4}$	0
s^0	K	0

Imaginarno os seka v točkah: $s = \pm j2$ pri $K = 16$. Razcepišče: $\sigma_1 = -0,55$, $\sigma_2 = -5,45$.



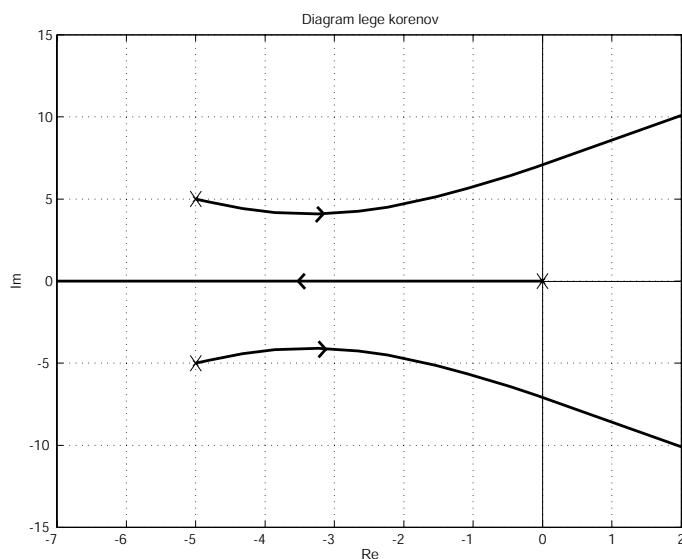
Slika 1.29: Rešitev primera 1.21b



Slika 1.30: Rešitev primera 1.21c

(c) DLK je prikazan na sliki 1.30.

Imaginarno os seka v točkah: $s = \pm j\sqrt{101}$ pri $K = 2020$. Razcepišči: $\sigma_1 = -3,38$, $\sigma_2 = -9,95$. $\sigma_a = -\frac{20}{3}$.



Slika 1.31: Rešitev primera 1.21d

(d) DLK je prikazan na sliki 1.31.

Imaginarno os seka v točkah: $s = \pm j\sqrt{50}$. $\sigma_a = -\frac{10}{3}$.

Primer 1.22. PD kompenzator na sliki 1.32 doda ničlo v odprtozančno prenosno funkcijo, torej:

$$G_K(s)G_P(s) = \frac{K(K_P + K_D s)}{s(s+2)} = \frac{KK_D(s+a)}{s(s+2)}; \quad a = \frac{K_P}{K_D}.$$

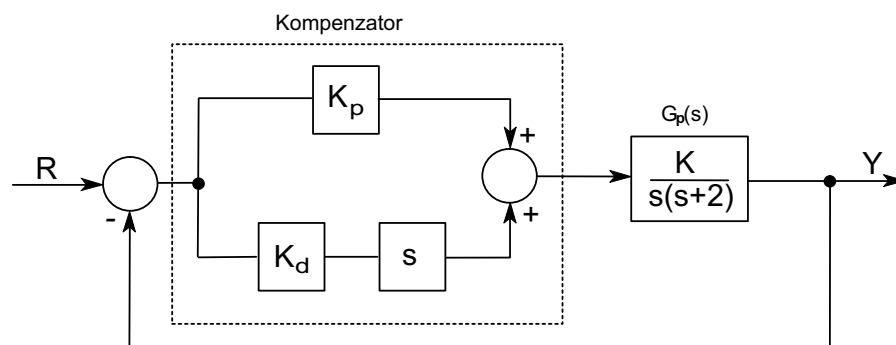
(a) Kakšen je učinek ničle pri naslednjih (skiciraj DLK) vrednostih:

- (1) $-a > 0$
- (2) $-2 < -a < 0$
- (3) $-a < -2$

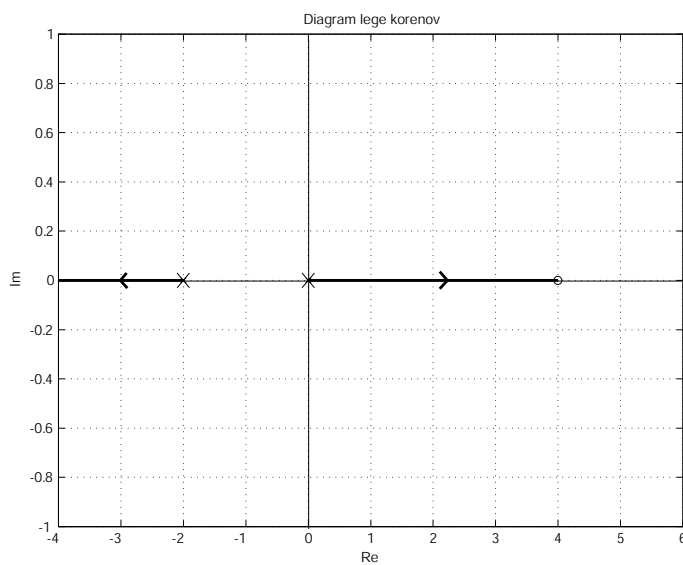
(b) V katerem primeru iz točke (a) je umiritveni čas najmanjši?

(c) V katerih primerih iz točke (a) je lahko sistem nestabilen?

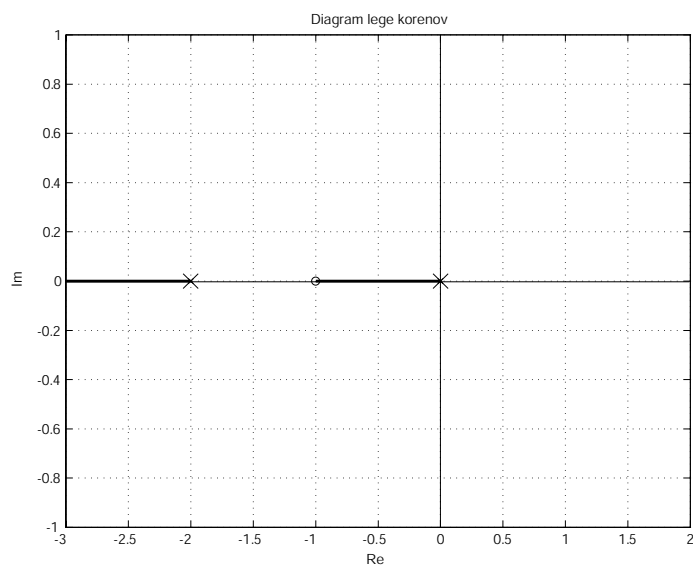
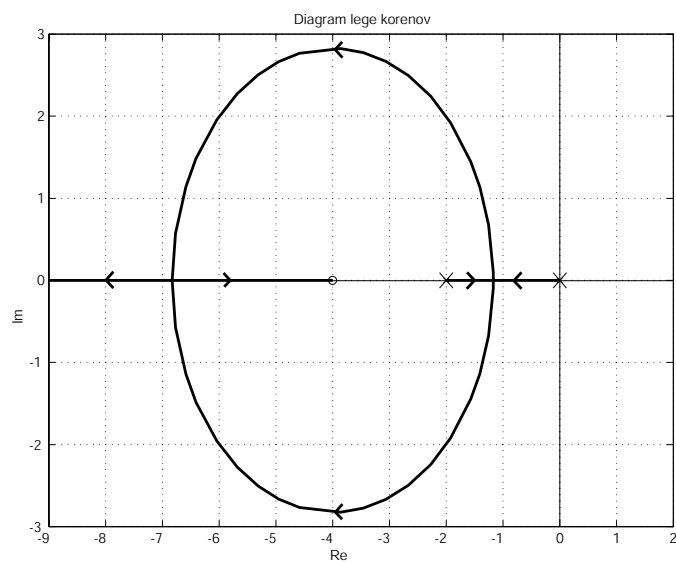
(d) V katerih primerih iz točke (a) je lahko sistem kritično dušen?



Slika 1.32: Bločni diagram iz primera 1.22

RešitevSlika 1.33: Rešitev primera 1.22a ($a=-4$)

- (a) Diagrami (DLK) so prikazani na slikah 1.33, 1.34 in 1.35.
- (b) V primeru (3) ($a > 2$).
- (c) V primeru (1) ($a < 0$). Nestabilen za vsak $K > 0$.
- (d) V primeru (3). Kritično dušen v razcepiščih.

Slika 1.34: Rešitev primera 1.22b ($a=1$)Slika 1.35: Rešitev primera 1.22c ($a=4$)

Primer 1.23. Predpostavimo odprtozančno prenosno funkcijo, kjer je $K > 0$.

$$KG(s)H(s) = \frac{K(as + 1)}{(bs + 1)(cs + 1)} = \frac{\frac{Ka}{bc}(s + \frac{1}{a})}{(s + \frac{1}{b})(s + \frac{1}{c})}$$

- (a) Poiščite vrednosti parametrov a, b in c tako, da bo zaprtozančni sistem stabilen za vse $K > 0$.
- (b) Poiščite vrednosti parametrov a, b in c tako, da bo zaprtozančni sistem stabilen za majhne vrednosti parametra K in nestabilen za velike vrednosti K .
- (c) Poiščite vrednosti parametrov a, b in c tako, da bo zaprtozančni sistem nestabilen za majhne vrednosti parametra K in stabilen za velike vrednosti K .

Rešitev

- (a) $a, b, c > 0$
- (b) $a < 0$ in $b, c > 0$
- (c) $a > 0$ in $b, c < 0$

Primer 1.24. Imamo zaprtozančni sistem, kjer je prenosna funkcija procesa, ki ga želimo regulirati enaka $G_p(s)$, regulator $G_r(s)$ je v direktni veji in imamo negativno enotino povratno zanko. Struktura regulatorja je naslednja:

$$G_r(s) = \frac{K(s + b)}{(s + a)}$$

,

proces pa naj bo enak

$$G_p(s) = \frac{1}{s^2}$$

.

- (a) Poiščite vrednosti parametrov regulatorja a, b in K tako, da bo zaprtozančni sistem sledil stopničasti spremembi reference.
- (b) Poiščite vrednosti parametrov regulatorja a, b in K tako, da bo zaprtozančni sistem izreguliral pogrešek zaradi stopničaste motnje na vhodu v proces.
- (c) Poiščite vrednosti parametrov regulatorja a, b in K tako, da bo zaprtozančni sistem izreguliral pogrešek zaradi stopničaste motnje na vhodu v proces in bo zaprtozančni sistem kritično dušen.

Rešitev

(a) $a, b, K > 0$

(b) $a = 0$ in $b, K > 0$

(c) $a = 0, b > 0$ in $K = 4b$

2. Analiza sistemov v frekvenčnem prostoru

Metode, ki temeljijo na frekvenčnem odzivu, so med najpomembnejšimi metodami pri analizi in sintezi sistemov. Prednosti metod v frekvenčnem prostoru so predvsem v dejstvu, da frekvenčni odziv pogosto lahko zelo enostavno izmerimo na sami napravi, brez modeliranja prenosne funkcije sistema.

Če je sistem dan v obliki prenosne funkcije, potem dobimo njegovo frekvenčno karakteristiko tako, da napravimo transformacijo iz prostora s v prostor $j\omega$:

$$G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega).$$

Za predstavitev frekvenčne karakteristike se običajno uporabljajo trije frekvenčni diagrami: Bodejev, polarni in Nicholsov diagram. V učbeniku so primeri prvih dveh diagramov, ki se bolj pogosto uporabljata.

2.1 Bodejev diagram

Metoda Bodejevega diagrama zahteva risanje ločenih diagramov odvisnosti absolutne vrednosti prenosne funkcije od frekvence in odvisnost faznega kota od frekvence.

Predpostavimo frekvenčno karakteristiko sistema, ki ima m ničel in n polov na levi strani in l polov v koordinatnem izhodišču prostora $j\omega$:

$$G(j\omega) = \frac{K(j\omega + z_1) \dots (j\omega + z_m)}{(j\omega)^l(j\omega + p_1) \dots (j\omega + p_n)}.$$

Oblika zapisa, ki je najprimernejša za risanje Bodejevega diagrama, je naslednja:

$$G(j\omega) = \frac{K \prod_i^m z_i (1 + \frac{j\omega}{z_1}) \dots (1 + \frac{j\omega}{z_m})}{(j\omega)^l (1 + \frac{j\omega}{p_1}) \dots (1 + \frac{j\omega}{p_n})},$$

kjer s K_B definiramo Bodejevo ojačenje

$$K_B = K \frac{\prod_i^m z_i}{\prod_i^n p_i}.$$

Amplitudni ($L(\omega)$) in fazni ($\Phi(\omega)$) del Bodejevega diagrama sta definirana z naslednjima enačbama:

$$L(\omega) = 20 \log_{10} |G(j\omega)|,$$

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(G(j\omega))}{\operatorname{Re}(G(j\omega))}.$$

Ob uporabi osnovnih lastnosti logaritmov

$$\log \frac{ab}{cd} = \log a + \log b - \log c - \log d$$

in pretvorbi kartezičnega zapisa kompleksnega števila v polarni zapis

$$\left(1 + j\frac{\omega}{a}\right) = \left|1 + j\frac{\omega}{a}\right| e^{j\phi},$$

kjer velja

$$\phi = \arctan \frac{\omega}{a},$$

$$\left|1 + j\frac{\omega}{a}\right| = \left(1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

dobimo za predpostavljeno splošno frekvenčno karakteristiko naslednji amplitudni in fazni potek:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log_{10} |G(j\omega)| = \\ &= 20 \log_{10} K_B + 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{z_1}\right| + \dots + 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{z_m}\right| - \\ &- 20 \log_{10} |j\omega| - 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{p_1}\right| - \dots - 20 \log_{10} \left|1 + \frac{j\omega}{p_n}\right|, \end{aligned}$$

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\operatorname{Im}(G(j\omega))}{\operatorname{Re}(G(j\omega))} = \phi_{z_1} + \dots + \phi_{z_m} - l * \frac{\pi}{2} - \phi_{p_1} - \dots - \phi_{p_n}.$$

Če predpostavimo splošni linearni element dinamičnih sistemov

$$G_i(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_i}},$$

je njegov amplitudni frekvenčni potek enak:

$$L_i(\omega) = 20 \log 1 - 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_i} \right| = -20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{\omega_i} \right|,$$

$$L_i(\omega) = 20 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Frekvenco ω_i imenujemo *lomna frekvenca*.

Pri načrtovanju dinamičnih sistemov si največkrat pomagamo z asimptotično aproksimacijo amplitudne in fazne karakteristike sistema. To pomeni, da za aproksimacijo frekvenčnega poteka poiščemo asimptoto za frekvence, ki so veliko manjše od lomne frekvence (*nizkofrekvenčna asimptota*), in asimptoto za visoke frekvence (*visokofrekvenčna asimptota*). Pri frekvencah, ki so veliko manjše od lomne frekvence ω_i , dobimo naslednji približek:

$$L_i(\omega) \simeq -20 \log(1) = 0dB, \quad \omega \ll \omega_i.$$

Za frekvence, ki pa so veliko večje od lomne frekvence ω_i , dobimo asimptoto, ki jo definira naslednja relacija:

$$L_i(\omega) \simeq -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_i} \right), \quad \omega \gg \omega_i.$$

Iz gornje relacije lahko ugotovimo, da frekvenčni potek pri visokih frekvencah aproksimira premica s konstantnim naklonom, ki je enak $-20dB/dek$. Torej, pri desetkratnem zvečanju frekvence pade amplitudni del za $20dB$.

Nizkofrekvenčno fazno asimptoto določimo po dogovoru za frekvence, ki so za dekada manjše od lomne frekvence:

$$\Phi(\omega) = 0^\circ, \quad \omega \leq \frac{\omega_i}{10}.$$

Visokofrekvenčno asimptoto pa na enak način določimo za frekvence, ki so za dekada večje od lomne frekvence:

$$\Phi(\omega) = -90^\circ, \quad \omega \geq 10\omega_i.$$

V vmesnem področju frekvenc pa potegnemo premico z naklonom $-45^\circ/dek$.

2.1.1 Bodejevi diagrami osnovnih členov

Bodejev diagram prenosne funkcije je sestavljen iz prispevkov posameznih osnovnih dinamičnih členov. V nadaljevanju bodo predstavljeni členi in njihove karakteristike:

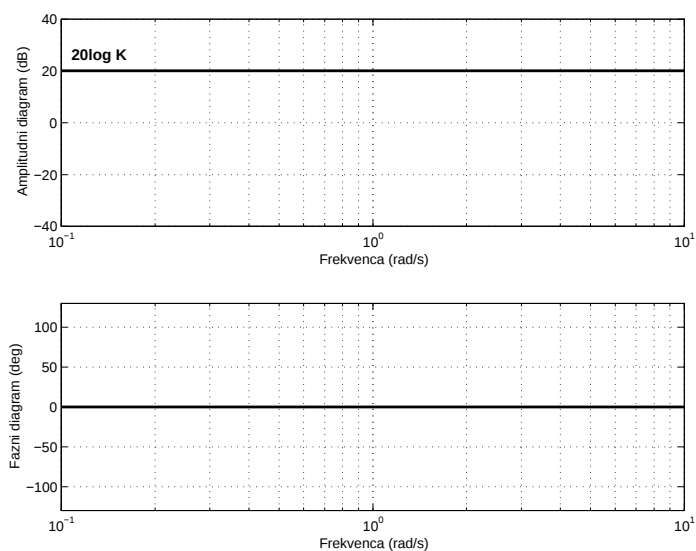
- ojačenje K ;
- integrirni ali diferencirni člen $(j\omega)^{\mp 1}$;
- člen 1. reda $(1 + j\omega T)^{\pm 1}$;
- člen 2. reda $[1 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + (\frac{j\omega}{\omega_n})^2]^{\pm 1}$.

Bodejev diagram konstante K

$$L(\omega) = 20 \log K$$

$$\Phi(\omega) = 0$$

Ustrezni Bodejev diagram prikazuje ($K = 10$) slika 2.1.



Slika 2.1: Bodejev diagram konstante

Bodejev diagram integrirnega in diferencirnega člena

Amplitudni del Bodejevega diagrama je definiran kot logaritem absolutne vrednosti in je v primeru integrirnega člena $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$ enak

$$L(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \log \omega,$$

fazni kot pa je

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} = \arctan \frac{-\frac{1}{\omega}}{0} = -90^\circ.$$

Pri risanju Bodejevih diagramov se srečujemo z logaritmično skalo in izrazom dekada, ki pomeni področje med ω in 10ω .

Diferencirni člen ima amplitudni del Bodejevega diagrama, ki je enak

$$L(\omega) = 20 \log |j\omega| = 20 \log \omega,$$

in fazni kot

$$\Phi(\omega) = 90^\circ.$$

Bodejeva diagrama integrirnega in diferencirnega člena prikazujeta slika 2.2 ter slika 2.3. Če frekvenčna karakteristika vsebuje člen $(\frac{1}{j\omega})^l$, potem velja:

$$L(\omega) = -20l \log \omega, \Phi(\omega) = -l90^\circ.$$

Za člen $(j\omega)^l$ pa je Bodejev diagram določen z enačbama:

$$L(\omega) = 20l \log \omega, \Phi(\omega) = l90^\circ.$$

Bodejev diagram člena 1. reda

Dinamični člen 1. reda predstavlja enačba

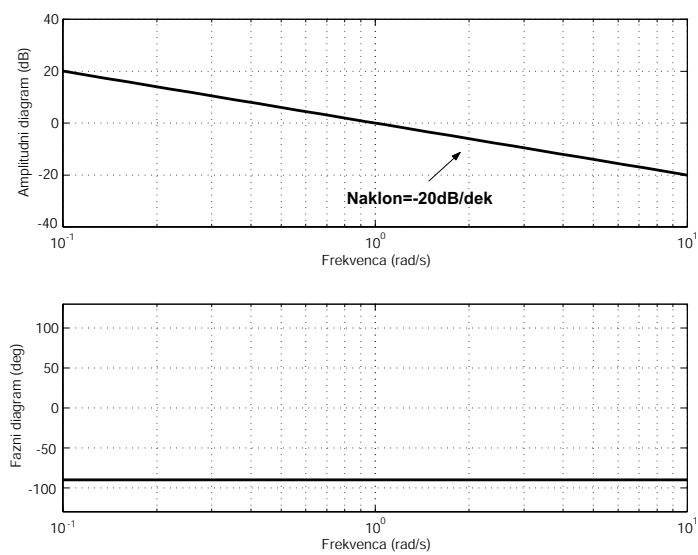
$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Amplitudni del Bodejevega diagrama je definiran kot

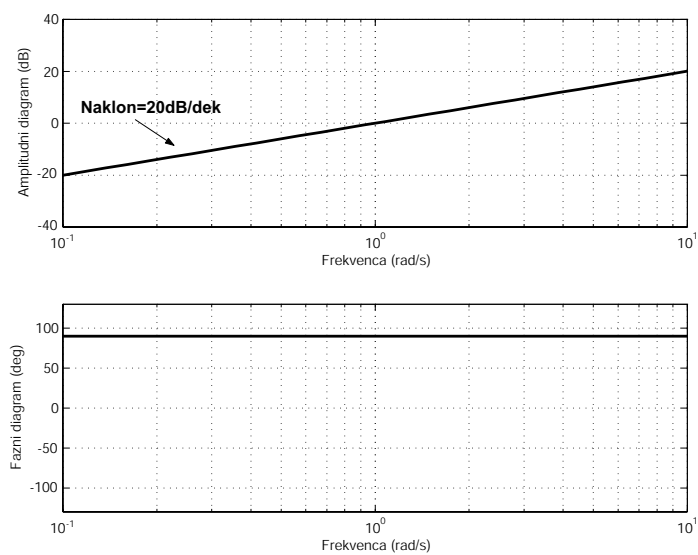
$$L(\omega) = 20 \log \left| \frac{1}{1 + j\omega T} \right| = -20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}.$$

Za nizke frekvence $\omega \ll \frac{1}{T}$ velja

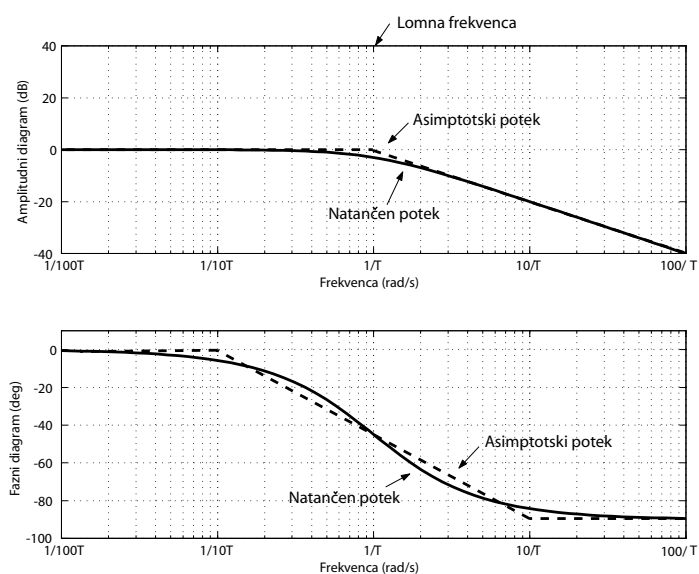
$$L(\omega) \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB},$$



Slika 2.2: Bodejev diagram integrirnega člena



Slika 2.3: Bodejev diagram diferencirnega člena



Slika 2.4: Bodejev diagram člena 1. reda $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

za visoke frekvence $\omega \gg \frac{1}{T}$ pa velja

$$L(\omega) \doteq -20 \log \omega T.$$

Fazni kot člena 1. reda pa določa enačba

$$\Phi(\omega) = \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} = -\arctan \omega T$$

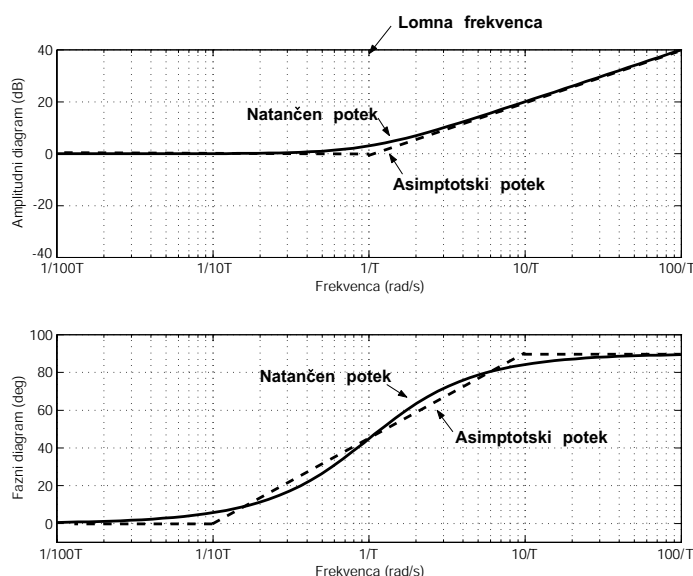
in ga narišemo s pomočjo razpredelnice

ω	$\frac{1}{10T}$	$\frac{1}{2T}$	$\frac{1}{T}$	$\frac{2}{T}$	$\frac{10}{T}$
$\Phi(\omega)$	-5.7°	-26.6°	-45°	-63.4°	-84.3°

Bodejev diagram člena 1. reda (asimptotski potek in natančen potek) prikazuje slika 2.4. Za člen $G(j\omega) = 1 + j\omega T$ pa velja

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log |1 + j\omega T| = 20 \log \sqrt{1 + (\omega T)^2}, \\ \Phi(\omega) &= \arctan \frac{\text{Im} [G(j\omega)]}{\text{Re} [G(j\omega)]} = \arctan \omega T. \end{aligned}$$

Bodejev diagram člena $1 + j\omega T$ prikazuje slika 2.5.

Slika 2.5: Bodejev diagram člena $G(j\omega) = 1 + j\omega T$

Bodejev diagram člena 1. reda z nestabilnim polom in ničlo na desni strani ravnine s

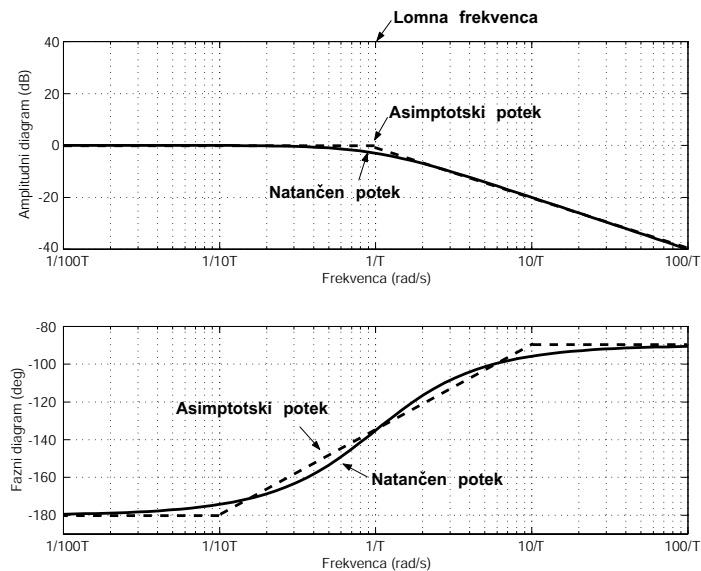
Slika 2.6 prikazuje Bodejev diagram člena 1. reda z nestabilnim polom, ki ima frekvenčno karakteristiko $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 1}$. Omeniti velja, da je v tem primeru ojačenje sistema negativno. Pri pozitivnem ojačenju sistema (množenje frekvenčne karakteristike z -1) se v Bodejevem diagramu spremeni le faza in sicer tako, da se fazni diagram premakne za 180° navzgor. Slika 2.7 pa prikazuje Bodejev diagram člena 1. reda z ničlo na desni strani ravnine s , ki ima frekvenčno karakteristiko $G(j\omega) = j\omega - 1$.

Bodejev diagram člena 2. reda

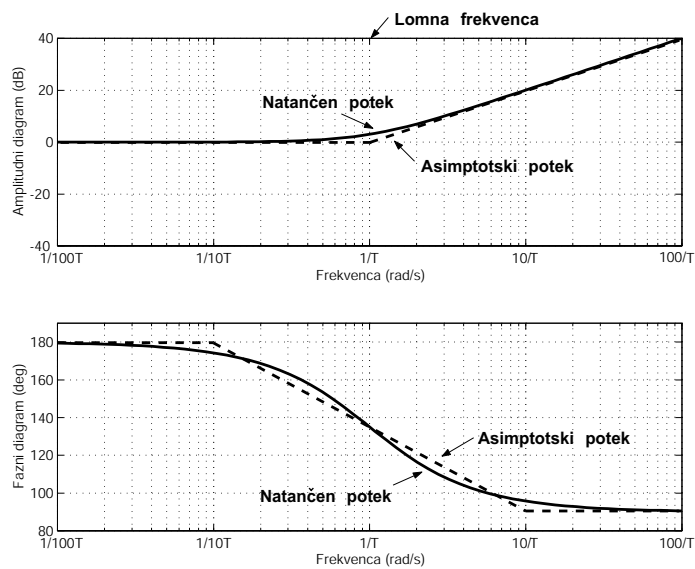
Frekvenčna karakteristika regulacijskega sistema pogosto vsebuje člen 2. reda

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}.$$

Konstanto ζ smo imenovali dušilni koeficient, ω_n pa lastno frekvenco. Če je $\zeta > 1$, razdelimo prenosno funkcijo v dva člena 1. reda, če pa je $\zeta < 1$, pa uporabimo postopek, ki ga bomo opisali.



Slika 2.6: Bodejev diagram člena $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega T - 1}$



Slika 2.7: Bodejev diagram člena $G(j\omega) = j\omega T - 1$

Amplitudni del Bodejevega diagrama podaja enačba 2.1:

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20 \log \left| \frac{1}{1 + 2\zeta \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right| = \\ &= -20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}. \end{aligned}$$

Nizkofrekvenčno asimptoto za $\omega \ll \omega_n$ zapišemo kot

$$L(\omega) \doteq -20 \log 1 = 0 \text{ dB},$$

visokofrekvenčno asimptoto pa z upoštevanjem $\omega \gg \omega_n$ zapišemo kot

$$L(\omega) \doteq -20 \log \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \log \frac{\omega}{\omega_n}.$$

Nizkofrekvenčna asimptota je torej premica 0dB, visokofrekvenčna asimptota pa gre skozi točko $L(\omega) = 0 \text{ dB}$ pri $\omega = \omega_n$ (lomna frekvenca) in ima naklon -40dB/dek.

Asimptotski potek pa relativno slabo določa natančen potek v bližini frekvence $\omega = \omega_n$. V bližini te točke ima frekvenčna karakteristika pri *resonančni frekvenci* ω_r *resonančni vrh* M_r . Medtem ko asimptotski potek ni odvisen od dušilnega koeficienta ζ , sta velikost resonančne frekvence ω_r in resonančnega vrha M_r odvisna od ζ . Natančen in asimptotski potek pri dušilnem koeficientu $\zeta = 0.3$ prikazuje (slika 2.8). Z upoštevanjem resonančne frekvence izračunamo resonančni vrh s pomočjo enačbe:

$$\begin{aligned} M_r &= |G(j\omega)|_{max} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}, \\ M_r [\text{dB}] &= L(\omega)_{max} = L(\omega_r) = 20 \log \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}. \end{aligned}$$

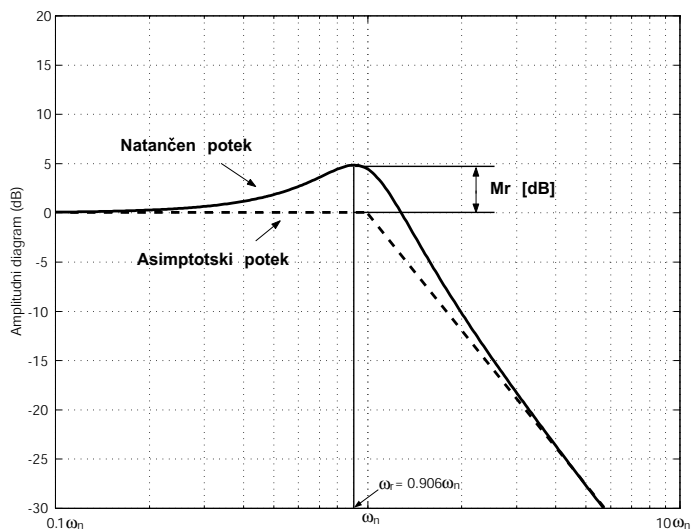
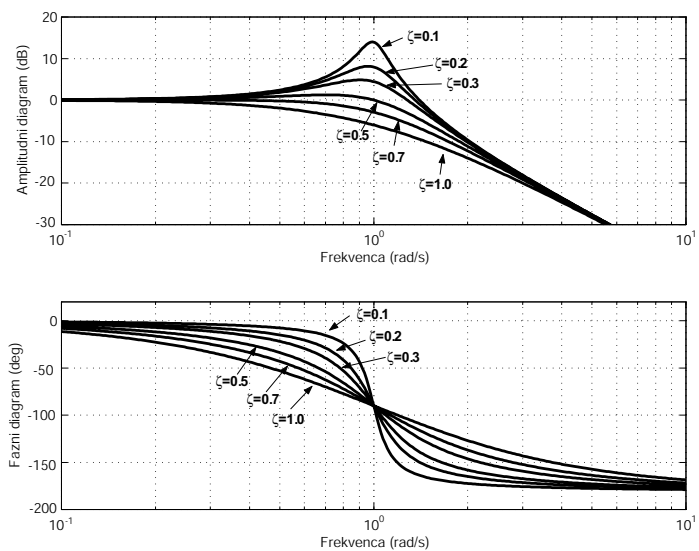
Obe enačbi veljata za $\zeta \leq 0.707$. Za $\zeta \geq 0.707$ je $M_r = 1$.

Bodejeve diagrame členov 2. reda za različne dušilne koeficiente prikazuje slika 2.9. Bodejev diagram člena 2. reda narišemo tako, da najprej določimo lastno frekvenco ω_n in dušilni koeficient ζ , nakar uporabimo diagrame, ki jih prikazuje slika 2.9.

2.1.2 Naloge

Primer 2.1. $\triangle$ Predpostavimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{10(s+1)}{s+10}.$$

Slika 2.8: Amplitudni del diagrama člena 2. reda ($\zeta = 0.3$)

Slika 2.9: Bodejevi diagrami členov 2.reda

Amplitudni Bodejev diagram dobimo tako, da najprej izračunamo absolutno vred-

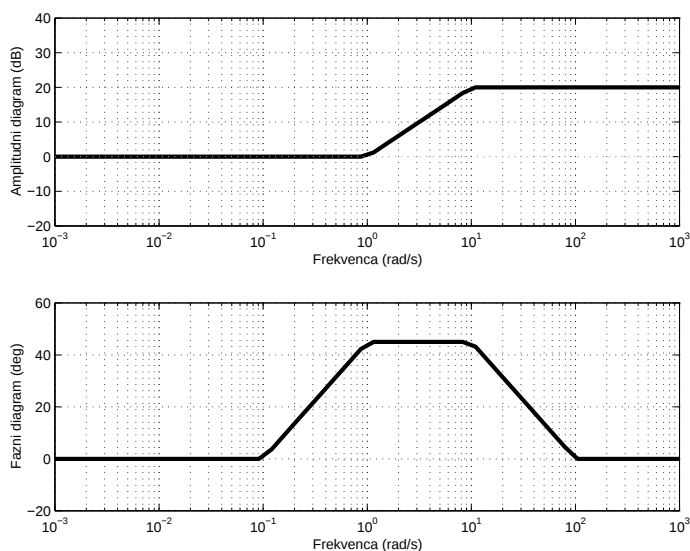
nost frekvenčne karakteristike $|G(j\omega)|$:

$$|G(j\omega)| = \frac{|1 + j\omega|}{|1 + \frac{j\omega}{10}|}.$$

Amplitudni del Bodejevega diagrama $L(\omega)$ lahko za primer 2.1 zapišemo kot

$$L(\omega) = 20 \log |G(j\omega)| = 20 \log |1 + j\omega| - 20 \log |1 + \frac{j\omega}{10}|.$$

Lomna frekvenca števca je $\omega_1 = 1$, lomna frekvenca imenovalca pa $\omega_2 = 10$. Amplitudni in fazni Bodejev diagram prikazuje slika 2.10. Če analiziramo limitni



Slika 2.10: Primer 2.1

vrednosti Bodejevega diagrama, t.j. absolutni vrednosti pri nizkih frekvencah in visokih frekvencah, dobimo naslednje:

$$G(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + \frac{j\omega}{10}},$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = 1 \Rightarrow 0dB$$

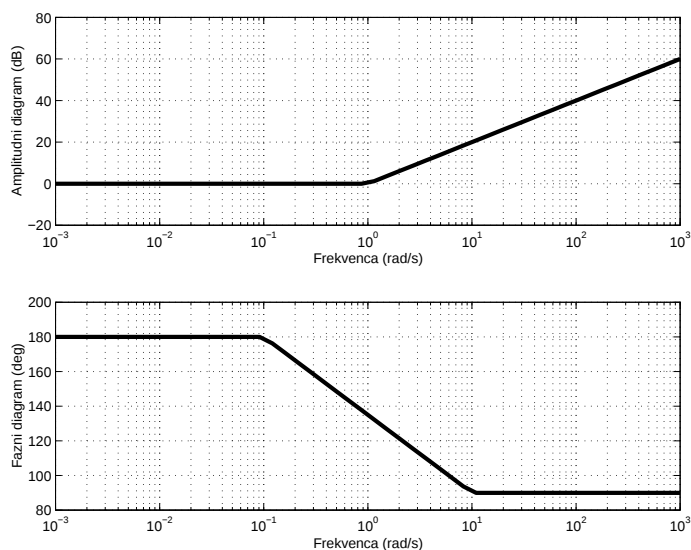
in

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{j\omega}{\frac{j\omega}{10}} = 10 \Rightarrow 20dB.$$

Primer 2.2. $\triangle$ Primer Bodejevega diagrama za sistem, ki je fazno neminimalen,

$$G(j\omega) = j\omega - 1,$$

prikazuje slika 2.11.



Slika 2.11: Primer 2.2

Primer 2.3. $\triangle$ Predpostavimo sistem s prenosno funkcijo, ki vsebuje tudi mrtvi čas:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}e^{-0,2s}.$$

Sistem vsebuje dva pola, ki prispevata k frekvenčnemu diagramu, kot je bilo to prikazano v prejšnjih primerih. Mrtvi čas pa prispeva samo k spremembi faze. Ker je ω v enotah rad/s, v Bodejevem diagramu pa fazo rišemo v stopinjah, je potrebno najprej pretvoriti enote

$$\text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi}$$

V primeru sistemov z mrtvim časom si pri risanju Bodejevega diagrama pomagamo s programskim paketom Matlab:

```

nn=30; a=-1; b=1; w=logspace(a,b,nn); Gnum=[0 0 1]; Gden=[1 1 0];
[mag,phase,w]=bode(Gnum,Gden,w);

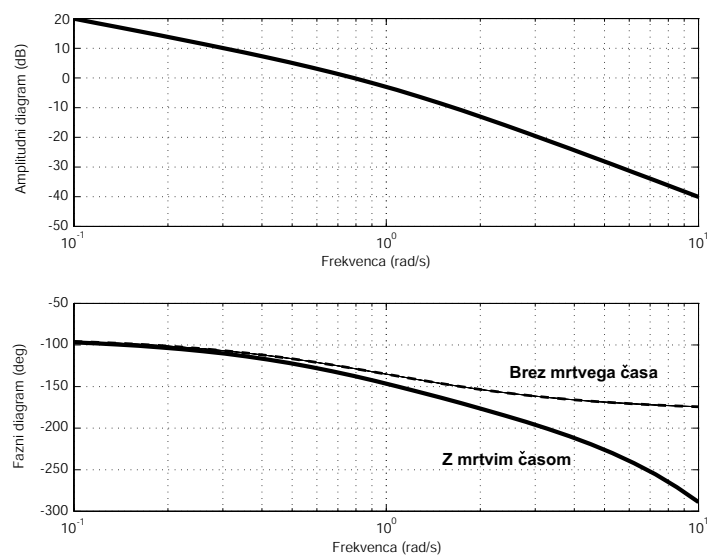
dB=20*log10(mag);
phase_dt=(-0.2)*(360/(2*pi))*w;
phase_n=phase+phase_dt;

subplot(211), semilogx(w,dB) title('Bodejev diagram');
xlabel('Frekvenca'); ylabel('dB'); grid

subplot(212), hold on, grid semilogx(w,phase_n);
semilogx(w,phase); xlabel('Frekvenca'); ylabel('Faza');

```

Rezultat, ki ga dobimo z gornjim programom v Matlabu, prikazuje slika 2.12



Slika 2.12: Primer 2.3

Primer 2.4. Predpostavimo prenosno funkcijo tretjega reda:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+10)}.$$

(a) Določite pasovno širino sistema.

(b) Določite časovne konstante sistema.

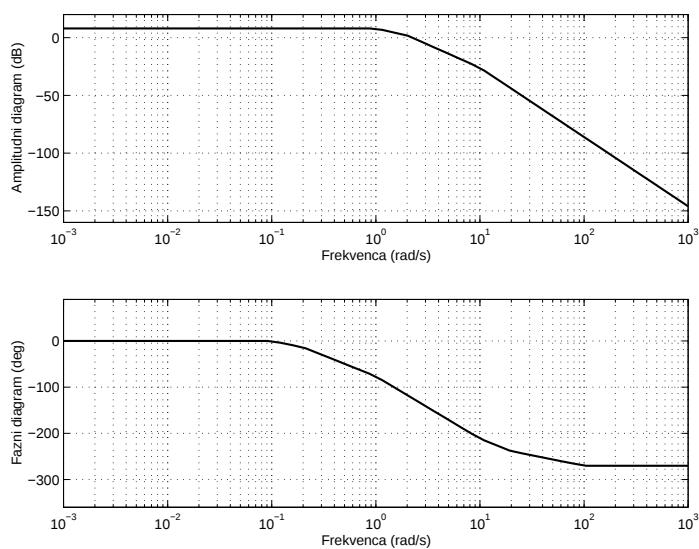
(c) Sistem je v ustaljenem stanju za $t > T_s$. Določite T_s .

Rešitev

(a) Pasovna širina ω_{bw} je definirana s frekvenco, pri kateri velja

$$|G(j\omega_{bw})| = \frac{\sqrt{2}}{2} G(0) = 1.76$$

$$\omega_{bw} = 0,825 \text{ rad/s}^{-1}$$



Slika 2.13: Primer 2.4

(b) $\tau_1 = 1s$, $\tau_2 = 0,5s$, $\tau_3 = 0,1s$

(c) $4\tau_1 = 4s$

Primer 2.5. Predpostavimo prenosno funkcijo sistema tretjega reda:

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{50}{(s+1)(s+2)(s+10)}$$

- (a) Vhodni signal v sistem je $r(t) = 100 \cos \omega t$. Določite odziv sistema $c(t)$ v ustaljenem stanju za frekvence $\omega = 0, 1, \omega = 1$ in $\omega = 10$.
- (b) Sistem je v ustaljenem stanju za $t > T_s$. Določite T_s .
- (c) Rezultate preverite s pomočjo Matlaba.

Rešitev

- (a) $c(t) = 248,4 \cos(0,1t - 9,15^\circ)$
 $c(t) = 157,3 \cos(t - 77,3^\circ)$
 $c(t) = 3,45 \cos(10t - 208^\circ)$
- (b) $T_s = 4s$
- (c) Matlab.

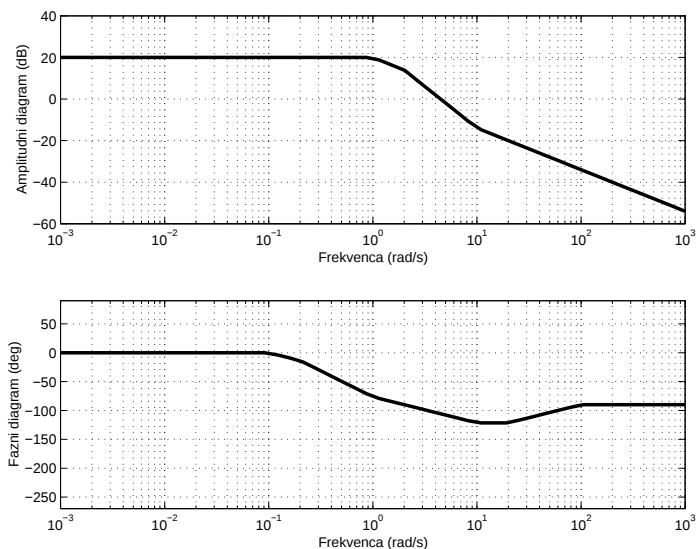
Primer 2.6. Predpostavimo prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+2)}.$$

- (a) Narišite asimptotični Bodejev diagram.
- (b) Vhodni signal v sistem je $\cos t$. Določite odziv sistema v ustaljenem stanju s pomočjo rezultatov iz diagrama.
- (c) Analitično izračunajte izhod iz (b).

Rešitev

- (a) $G(j0) = 10 \angle 0^\circ \Rightarrow 20dB$
 $G(j\infty) \rightarrow \frac{2}{\omega} \angle -90^\circ$
- (b) $G(j1) = 20dB \angle -80^\circ = 10 \angle -80^\circ$,
 izhodni signal $= 10 \cos(t - 80^\circ)$
- (c) $G(j1) = \frac{2(10+1j)}{(1+1j)(2+1j)} = \frac{2(10,05 \angle 5,6^\circ)}{(1,41 \angle 45^\circ)(2,23 \angle 26,6^\circ)}$,
 izhodni signal $= 6,38 \cos(t - 65,9^\circ)$



Slika 2.14: Primer 2.6

Primer 2.7. *Skicirajte Bodejeve diagrame naslednjih prenosnih funkcij:*

(a) $G(s) = \frac{(s+10)}{s}$;

(b) $G(s) = \frac{1}{(s+0,1)(s+1)}$;

(c) $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2}$;

(d) $G(s) = \frac{100}{s^2(s+1)}$;

(e) *Za primer iz naloge (d) preverite rezultate s pomočjo Matlaba.*

Rešitev

(a) $G(j0) \rightarrow \frac{10}{\omega} \angle -90^\circ$

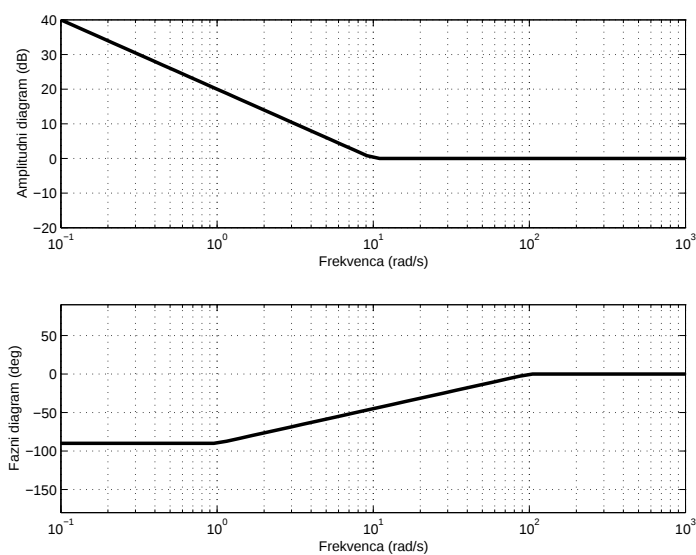
$G(j\infty) \rightarrow 1 \angle 0^\circ$

(b) $G(j0) \rightarrow 10 \angle 0^\circ$

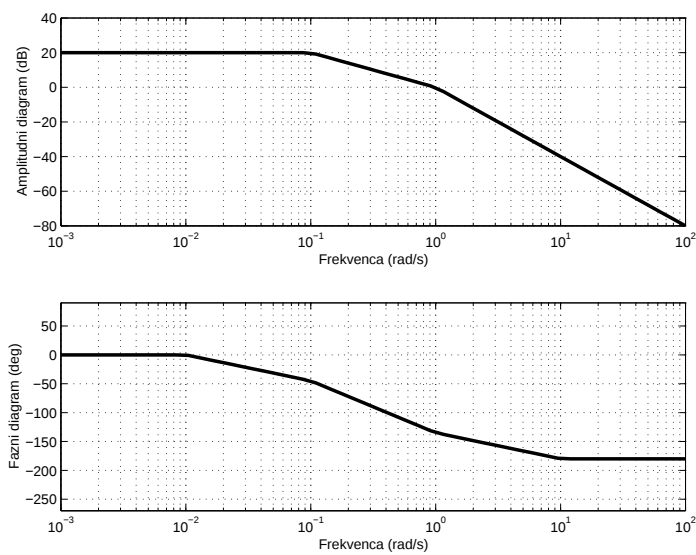
$G(j\infty) \rightarrow \frac{1}{\omega^2} \angle 180^\circ$

(c) $G(j0) \rightarrow \frac{1}{\omega^2} \angle 180^\circ$

$G(j\infty) \rightarrow \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$



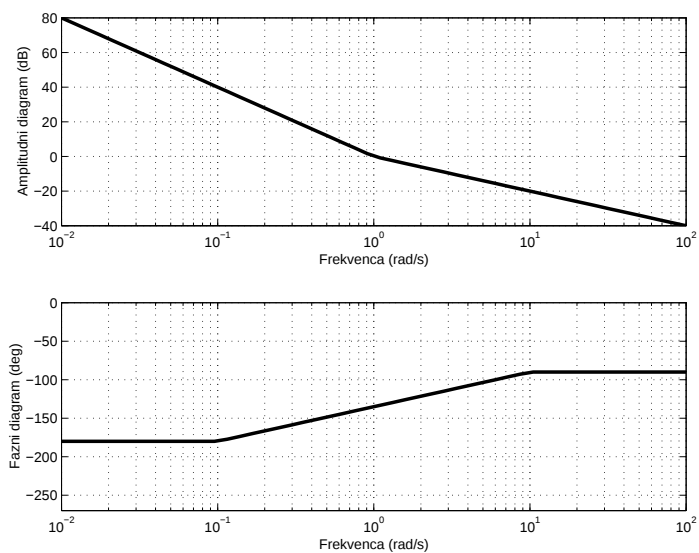
Slika 2.15: Primer 2.7a



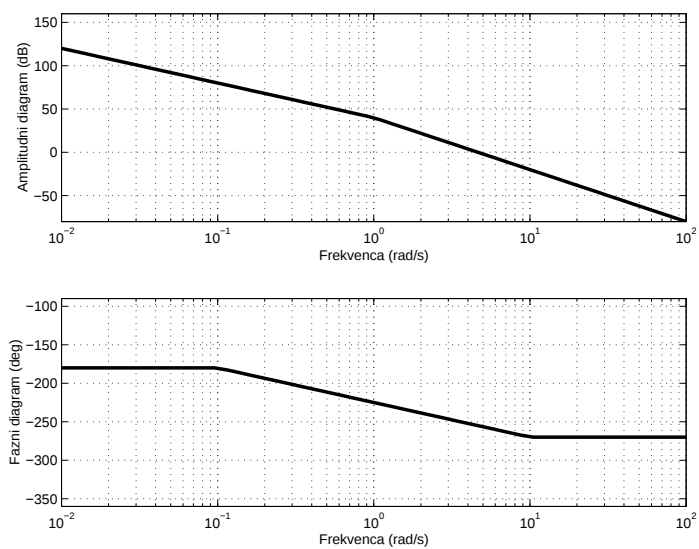
Slika 2.16: Primer 2.7b

$$(d) \quad G(j0) \rightarrow \frac{100}{\omega^2} \angle -180^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{100}{\omega^3} \angle -270^\circ$$



Slika 2.17: Primer 2.7c



Slika 2.18: Primer 2.7d

(e) *Matlab.*

Primer 2.8. Predpostavimo prenosno funkcijo:

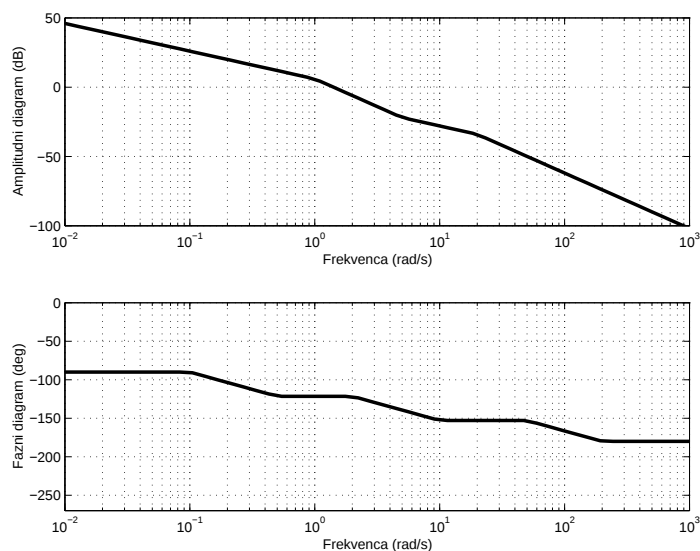
$$G(s) = \frac{8(s+5)}{s(s+1)(s+20)}.$$

Narišite asimptotični Bodejev diagram.

Rešitev

$$G(j0) \rightarrow \frac{2}{\omega} \angle -90^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{8}{\omega^2} \angle -180^\circ$$



Slika 2.19: Primer 2.8

Primer 2.9. Narišite asimptotične Bodejeve diagrame naslednjih prenosnih funkcij:

(a) $G(s) = \frac{100}{(s+1)(s-1)};$

(b) $G(s) = \frac{1-s}{1+s};$

(c) $G(s) = \frac{-s}{(s+1)(s-1)};$

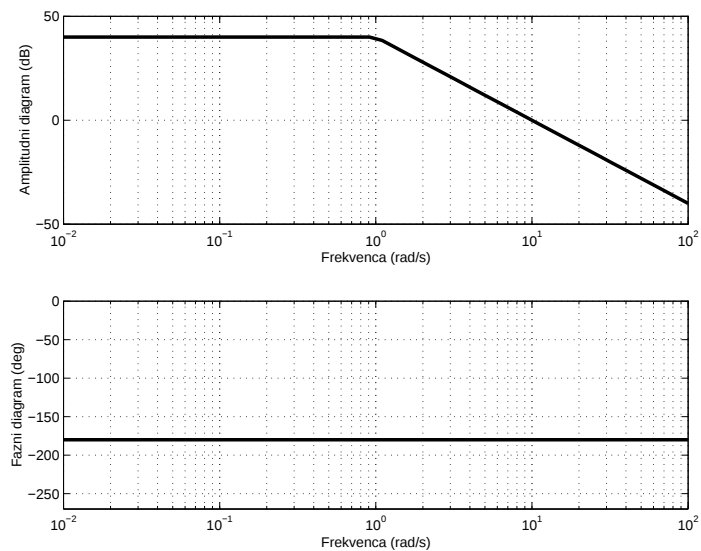
$$(d) G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)}.$$

(e) Za primer iz naloge (c) preverite rezultate s pomočjo Matlaba.

Rešitev

$$(a) G(j0) = -100 \Rightarrow 40dB \angle -180^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{100}{\omega^2} \angle -180^\circ$$



Slika 2.20: Primer 2.9a

$$(b) G(j0) = 1 \angle 0^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{-j\omega}{j\omega} = 1 \angle -180^\circ$$

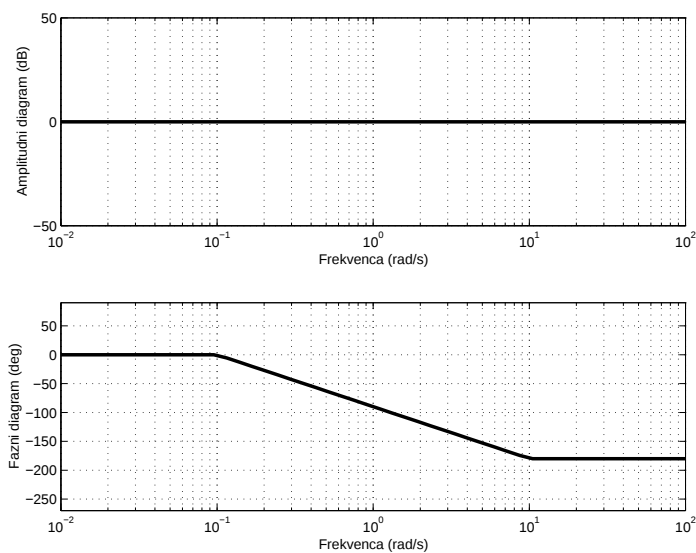
$$(c) G(j0) = \lim_{\omega \rightarrow 0} j\omega$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega \angle -90^\circ}{-\omega^2 - 1} = \frac{\omega \angle -90^\circ}{\omega^2 + 1 \angle -180^\circ} = \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \angle 90^\circ$$

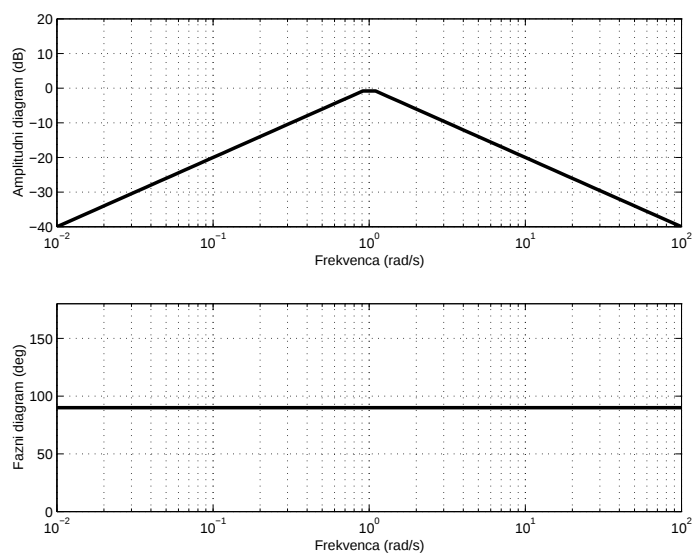
$$(d) G(j0) \rightarrow \frac{1}{\omega} \angle -90^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{-j\omega}{(j\omega)^2} = \frac{1}{\omega} \angle -270^\circ = \frac{\omega}{\omega^2 + 1} \angle 90^\circ$$

(e) Matlab.

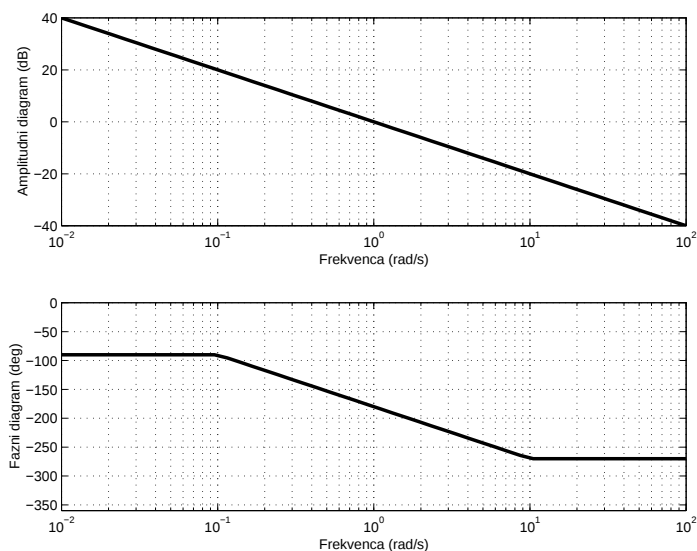


Slika 2.21: Primer 2.9b



Slika 2.22: Primer 2.9c

Primer 2.10. *Analitično prikažite razliko med Bodejevima diagramoma za odprtozančno funkcijo $G(s)$ in $-G(s)$.*



Slika 2.23: Primer 2.9d

Rešitev

$$-G(j\omega) = G(j\omega) [1 \angle 180^\circ] = |G(j\omega)| \angle \arg G(j\omega) \pm 180^\circ$$

$-G(j\omega)$ ima enak amplitudni del diagrama kot $G(j\omega)$

$\arg(-G(j\omega)) = \arg(G(j\omega)) \pm 180^\circ$ in fazni premik za $\pm 180^\circ$

Primer 2.11. Predpostavimo prenosno funkcijo:

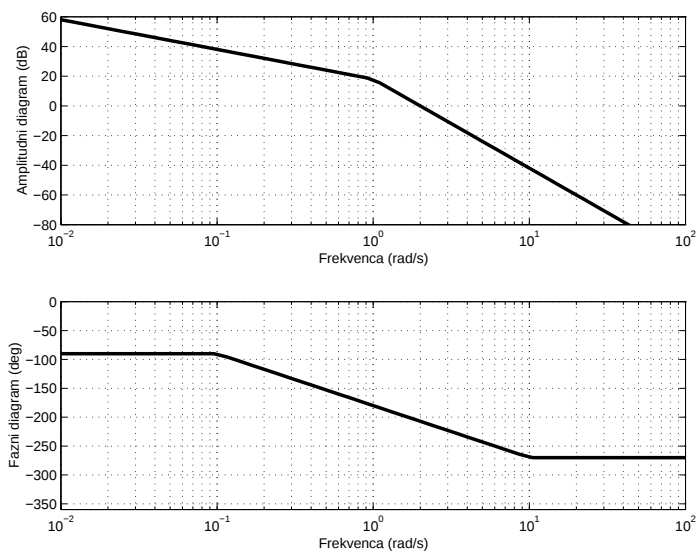
$$G(s) = \frac{8}{s(s+1)^2}.$$

- (a) Narišite asimptotični Bodejev diagram.
- (b) Iz diagrama določite frekvenco ω_1 , kjer velja $\Phi(\omega_1) = -180^\circ$.
- (c) Iz diagrama določite vrednost $|G(j\omega_1)|$ iz (b).
- (d) Nalogo (c) rešite analitično.

Rešitev

$$(a) \quad G(j0) = \frac{8}{\omega} \angle -90^\circ, G(j\infty) = \frac{8}{\omega^3} \angle -270^\circ$$

$$20 \log 8 \Rightarrow 18,06dB$$



Slika 2.24: Primer 2.11

$$(b) \quad \omega_1 = 1$$

$$(c) \quad |G(j1)| = 8 \Rightarrow 18,06dB$$

$$(d) \quad G(j1) = \frac{8}{j(1+j)^2} = \frac{8}{(1 \angle 90^\circ)(\sqrt{2} \angle 45^\circ)^2} = \frac{8}{(1)(2)} \angle -180^\circ = 4 \angle -180^\circ$$

Primer 2.12. Predpostavimo prenosno funkcijo:

$$G(s) = \frac{400(s+1)}{s(s^2 + 20\zeta s + 100)}$$

(a) Narišite asimptotični Bodejev diagram za $\zeta = 1$.

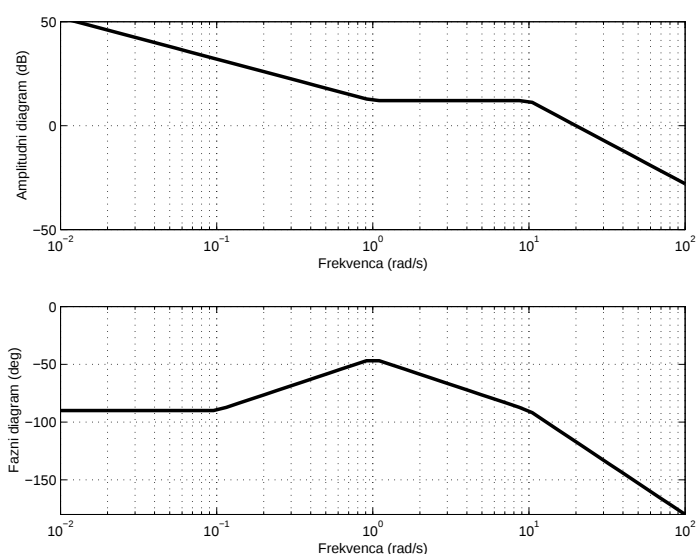
(b) Narišite asimptotični Bodejev diagram za $\zeta = 0,1$.

(c) S pomočjo Matlaba narišite primer iz (b) in ocenite maksimalno napako.

Rešitev

$$(a) \quad G(j0) \rightarrow \frac{4}{\omega} \angle -90^\circ$$

$$(b) \quad G(j\infty) \rightarrow \frac{400}{(\omega)^2} \angle -180^\circ$$

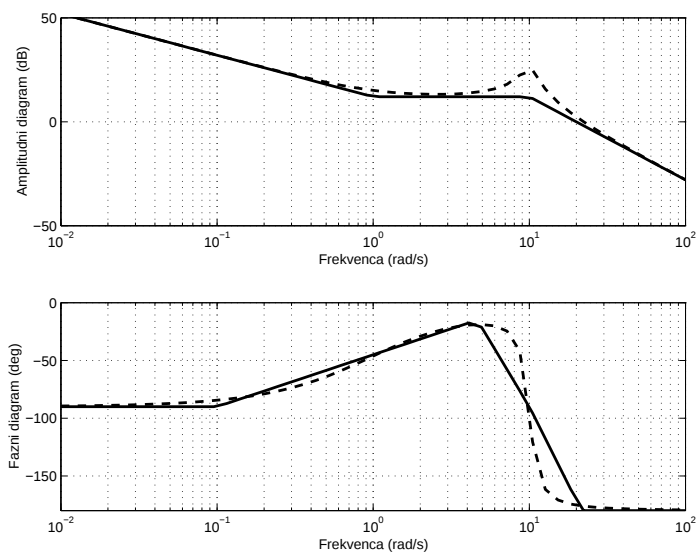


Slika 2.25: Primer 2.12a

(c) Maksimalna napaka se pojavi pri lomni frekvenci $\omega_1 = 10$ in je približno enaka $20 \log \left| \frac{1}{2\zeta} \right| = -20 \log 2\zeta = 20 \text{ dB}$.

2.2 Polarni diagram

Polarni diagram predstavlja frekvenčno karakteristiko $G(j\omega)$ v kompleksni ravnini. Vsaka točka je dana s polarnim zapisom kompleksorja $G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\angle[G(j\omega)]}$ pri določeni frekvenci. Če se frekvenca spreminja od 0 do ∞ , zariše kompleksor polarni diagram.



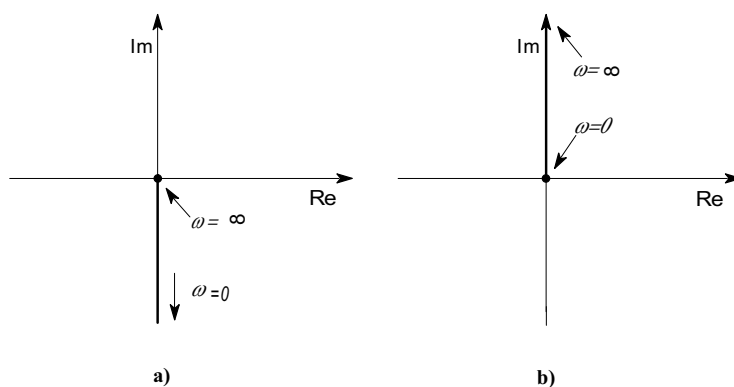
(b)

Slika 2.26: Primer 2.12b

2.2.1 Polarni diagrami osnovnih členov

Polarni diagram integrirnega in diferencirnega člena

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{1}{\omega} e^{j(-90^\circ)}$$



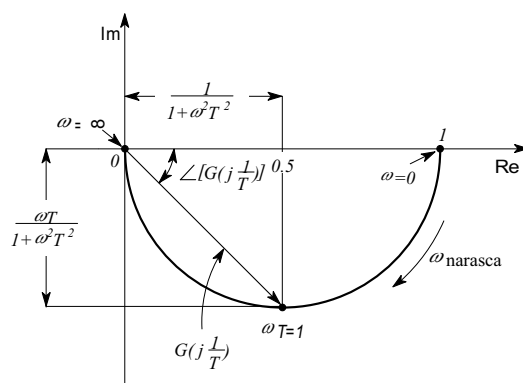
Slika 2.27: Polarna diagrama: integrirni člen (a), diferencirni člen (b)

Polarni diagram člena 1. reda

Polarni diagram dinamičnega elementa, ki ga definira frekvenčna karakteristika $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$, podaja enačba

$$G(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} e^{j(-\arctan \omega T)}.$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) &= 1e^{j0^\circ} \\ G(j\frac{1}{T}) &= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j(-45^\circ)} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) &= 0e^{j(-90^\circ)} \end{aligned}$$

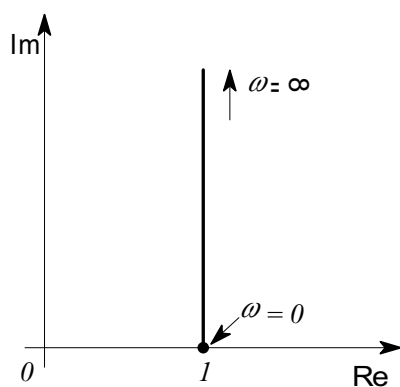
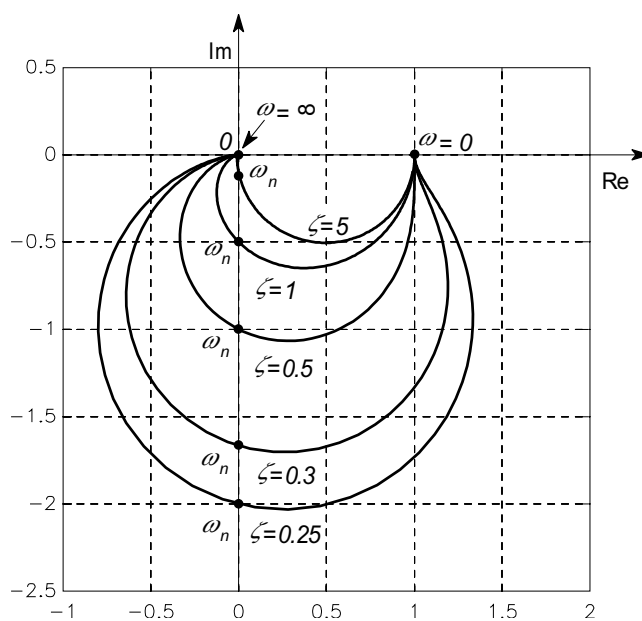


Slika 2.28: Polarni diagram člena $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T}$

Polarni diagram člena drugega reda

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) &= 1e^{j0^\circ} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) &= 0e^{j(-180^\circ)} \end{aligned}$$

Slika 2.29: Polarni diagram člena $1 + j\omega T$ Slika 2.30: Polarni diagrami člena $\frac{1}{1 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$

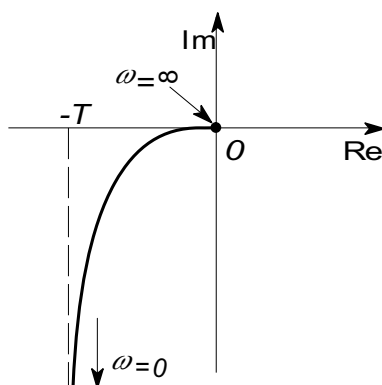
$$G(j\omega_n) = \frac{1}{j2\zeta} = \frac{1}{2\zeta}e^{-j90^\circ}$$

Polarni diagram sistema 1. vrste

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1 + j\omega T)} = -\frac{T}{1 + (\omega T)^2} - j\frac{1}{\omega(1 + \omega^2 T^2)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) = -T - j\infty = \infty e^{j(-90^\circ)}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = -0 - j0 = 0 e^{j(-180^\circ)}$$



Slika 2.31: Polarni diagram sistema 1. vrste

2.2.2 Splošne značilnosti polarnih diagramov

Za sistem, katerega frekvenčna karakteristika je dana z enačbo

$$G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \dots + b_m}{(j\omega)^l (a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \dots + a_n)} = \frac{K(1 + j\omega T_{b_1}) \dots (1 + j\omega T_{b_m})}{(j\omega)^l (1 + j\omega T_{a_1}) \dots (1 + j\omega T_{a_n})}$$

pri čemer velja $n > m$, bomo podali nekaj splošnih lastnosti, navodil oz. zaključkov.

- Sistem ničte vrste, $l = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) &= |G(j0)| e^{j(0^\circ)} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| &= 0 \end{aligned}$$

- Sistem 1. vrste, $l = 1$

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) &= \infty e^{j(-90^\circ)} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| &= 0\end{aligned}$$

- $l \geq 2$

$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} G(j\omega) &= \infty e^{j(-l \cdot 90^\circ)} \\ \lim_{\omega \rightarrow \infty} |G(j\omega)| &= 0\end{aligned}$$

- $l=0, n > m$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m}{a_0(j\omega)^n} = \frac{b_0}{a_0}(j\omega)^{-(n-m)} = 0e^{-90^\circ(n-m)}$$

Polarne diagrame nekaterih enostavnejših prenosnih funkcij oz. frekvenčnih karakteristik prikazuje slika 2.32.

2.2.3 Naloge

Primer 2.13. $\triangle$ Predpostavimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{1}{s - a},$$

kjer je $a > 0$.

Narišite polarni diagram.

Rešitev

$$G(j0) = \frac{-1}{a}$$

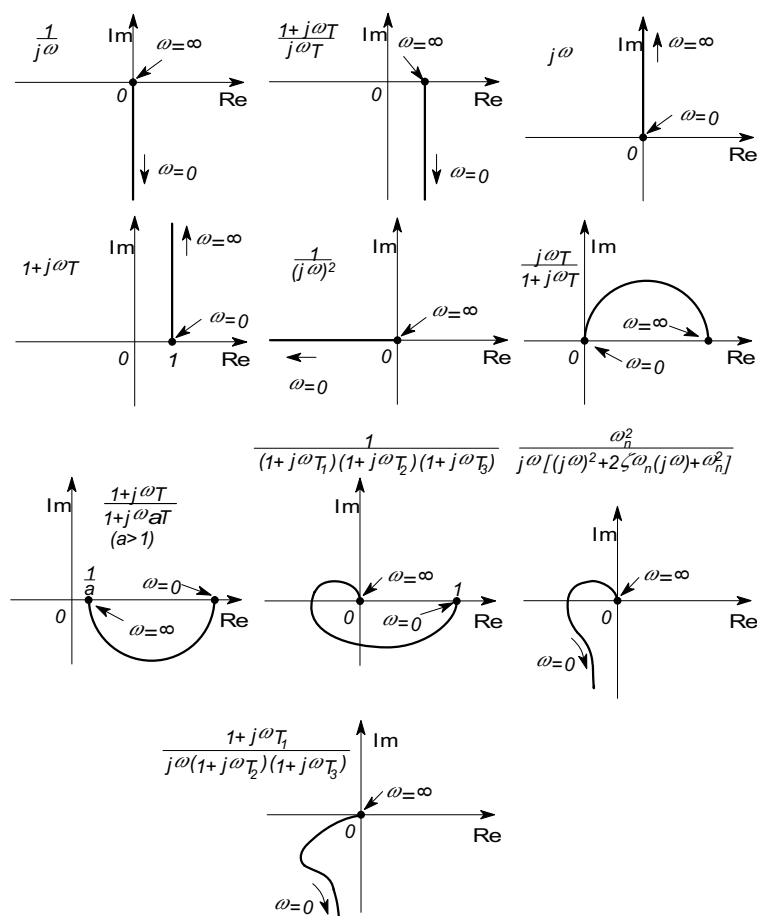
$$G(j\omega) = \frac{-a}{\omega^2 + a^2} - j \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$G(j\infty) \rightarrow 0^- + j0^- = 0e^{-j90^\circ}$$

Primer 2.14. Predpostavimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{1}{a - s},$$

kjer je $a > 0$.



Slika 2.32: Polarni diagrami nekaterih enostavnejših sistemov

Narišite polarni diagram.

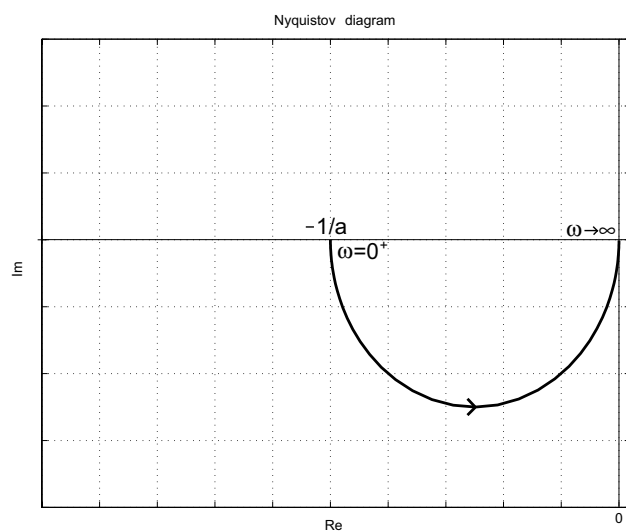
Rešitev

$$G(j0) = \frac{1}{a}$$

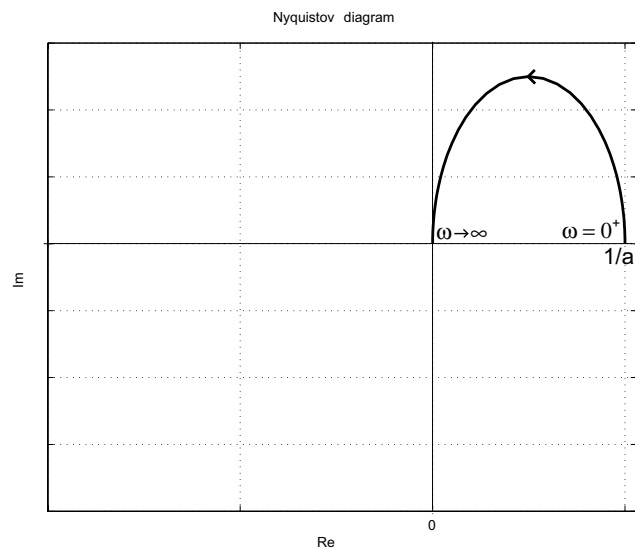
$$G(j\omega) = \frac{a}{\omega^2 + a^2} + j \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

$$G(j\infty) \rightarrow 0^+ + j0^+ = 0e^{j90^\circ}$$

Primer 2.15. Predpostavimo prenosno funkcijo



Slika 2.33: Rešitev primera 2.13



Slika 2.34: Rešitev primera 2.14

$$G(s) = \frac{s - b}{s + a},$$

kjer velja $a, b > 0$.

(a) Narišite polarni diagram.

(b) Pokažite, da polarni diagram opiše polkrog.

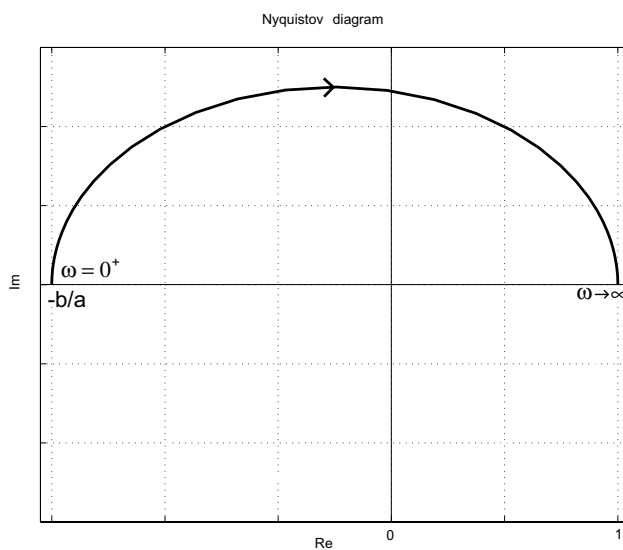
Rešitev

$$(a) \quad G(j0) = \frac{-b}{a} = \frac{b}{a}e^{j180^\circ}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2 - ab}{\omega^2 + a^2} + j \frac{\omega(a+b)}{\omega^2 + a^2}$$

$$\operatorname{Re} [G(j\sqrt{ab})] = 0$$

$$G(j\infty) \rightarrow 1e^{j0^\circ}$$



Slika 2.35: Rešitev primera 2.15

(b) Pokažete lahko, da so vse točke, ki ležijo na polarnem diagramu, od središča $S = \frac{a-b}{2a}$ enako oddaljene, za $\frac{a+b}{2a}$.

Primer 2.16. Predpostavimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{s+b}{s-a},$$

kjer velja $a, b > 0$.

(a) Narišite polarni diagram.

(b) Pokažite, da polarni diagram opiše polkrog.

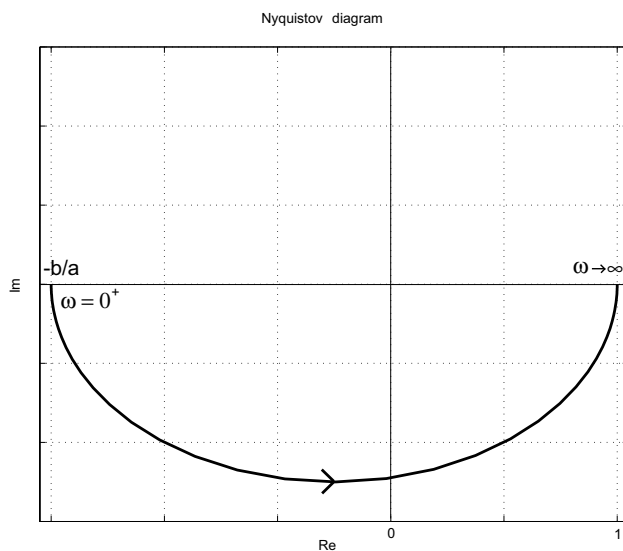
Rešitev

$$(a) \quad G(j0) = \frac{-b}{a} = \frac{b}{a}e^{-j180^\circ}$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2 - ab}{\omega^2 + a^2} - j \frac{\omega(a+b)}{\omega^2 + a^2}$$

$$\operatorname{Re} [G(j\sqrt{ab})] = 0$$

$$G(j\infty) \rightarrow 1e^{j0^\circ}$$



Slika 2.36: Rešitev primera 2.16

(b) Pokažete lahko, da so vse točke, ki ležijo na polarnem diagramu, od središča $S = \frac{a-b}{2a}$ enako oddaljene, za $\frac{a+b}{2a}$.

Primer 2.17. Predpostavimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{s+b}{s+a},$$

kjer velja $a, b > 0$.

(a) Narišite polarni diagram pri pogoju $a > b$.

(b) Narišite polarni diagram pri pogoju $a < b$.

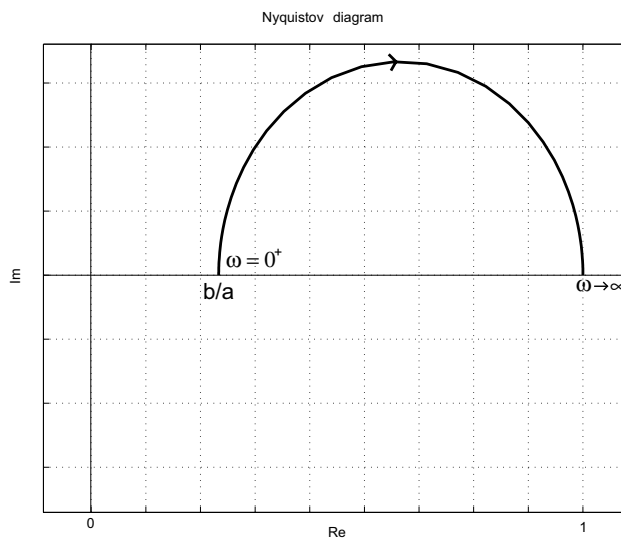
Rešitev

(a) $G(j0) = \frac{b}{a} < 1$

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2+ab}{\omega^2+a^2} + j \frac{\omega(a-b)}{\omega^2+a^2}$$

$$\text{Im}[G(j\omega)] > 0, \quad \forall \omega$$

$$G(j\infty) \rightarrow 1e^{j0}$$



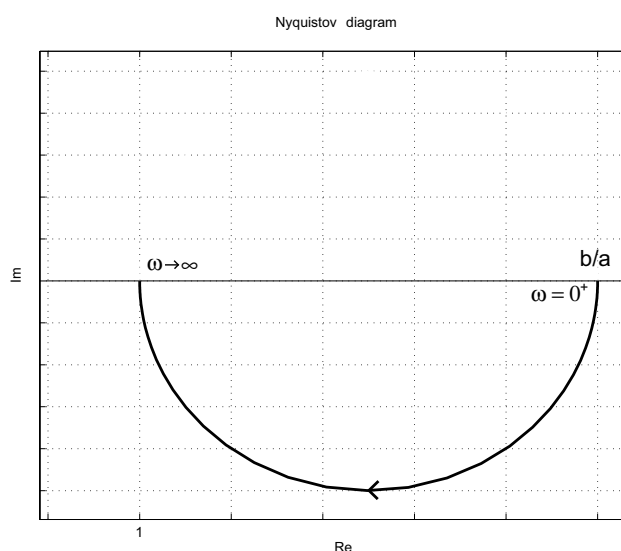
Slika 2.37: Rešitev primera 2.17a

(b) $G(j0) = \frac{b}{a} > 1$

$$G(j\omega) = \frac{\omega^2+ab}{\omega^2+a^2} + j \frac{\omega(a-b)}{\omega^2+a^2}$$

$$\operatorname{Im}[G(j\omega)] < 0, \quad \forall \omega$$

$$G(j\infty) \rightarrow 1e^{j0^0}$$



Slika 2.38: Rešitev primera 2.17b

Primer 2.18. Predpostavimo prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{s+b}{s+a},$$

kjer velja $a, b > 0$ in $b > a$.

(a) Določite po absolutni vrednosti maksimalni fazni kot frekvenčne karakteristike $G(j\omega)$.

(b) Določite frekvenco ω_{max} pri kateri se pojavi maksimalni fazni kot.

Rešitev

$$(a) \sin \phi_{max} = \frac{b-a}{b+a}$$

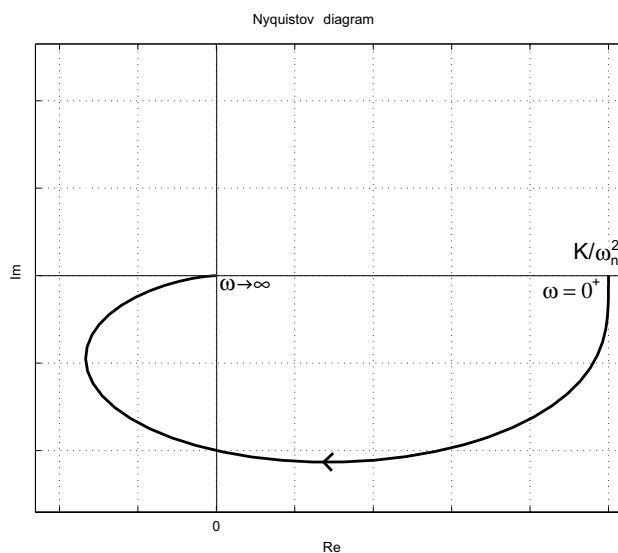
$$(b) \phi_{max} = \arctan \frac{\omega}{b} - \arctan \frac{\omega}{a}; \quad \frac{d\phi}{d\omega} = \frac{\frac{1}{b}}{1 + \left(\frac{\omega}{b}\right)^2} - \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2} \Big|_{\omega_{max}} = 0; \quad \omega_{max} = \sqrt{ab}$$

Primer 2.19. Sistem opisuje prenosna funkcija

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}.$$

- (a) Narišite polarni diagram.
- (b) Določite vrednost resonančne frekvence ω_{res} in vrednost dušenja ζ , kjer se pojavi resonančna frekvenca.
- (c) Določite absolutno vrednost frekvenčne karakteristike pri resonančni frekvenci ω_{res} .

Rešitev



(a)

Slika 2.39: Rešitev primera 2.19

$$(b) \omega_{res} = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

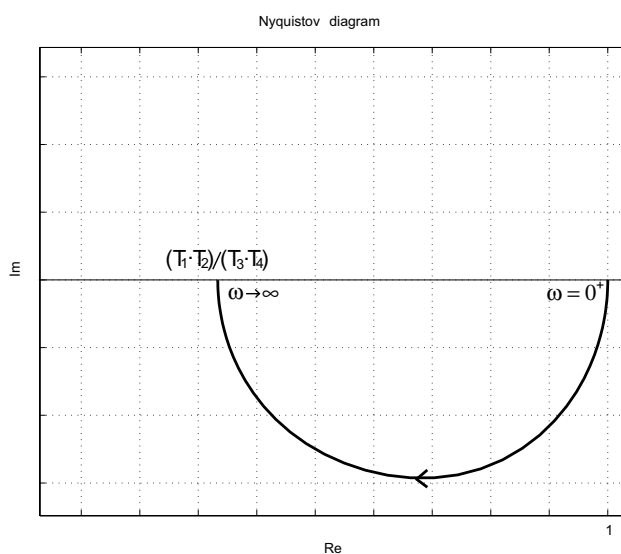
$$(c) |G(j\omega_{res})| = \frac{K}{\omega_n^2 2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}$$

Primer 2.20. Sistem opisuje prenosna funkcija

$$G(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + T_3 s)(1 + T_4 s)}.$$

Narišite polarni diagram.

Rešitev



Slika 2.40: Rešitev primera 2.20

$$G(j0) = 1e^{j0^0}$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{T_1 T_2}{T_3 T_4} e^{j0^0}$$

$$\arg G(j\omega) = \arctan T_1 \omega + \arctan T_2 \omega - \arctan T_3 \omega - \arctan T_4 \omega < 0, \forall \omega$$

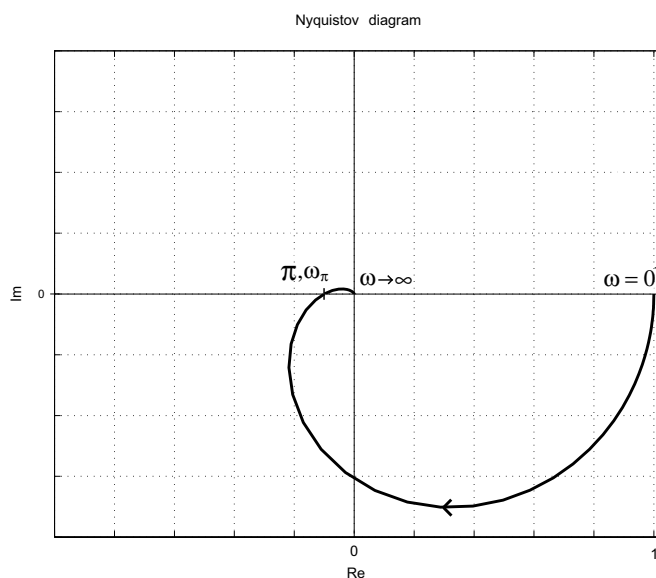
Primer 2.21. Sistem opisuje prenosna funkcija

$$G(s) = \frac{K}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_3 s)}.$$

(a) Narišite polarni diagram.

(b) Določite frekvenco ω_π v presečišču polarnega diagrama z Re-osjo.

Rešitev



Slika 2.41: Rešitev primera 2.21

$$G(j0) = Ke^{j0^0}$$

$$G(j\infty) \rightarrow 0e^{-j270^0}$$

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$$

2.3 Stabilnost regulacijskih sistemov

Stabilnost smo do sedaj obravnavali v absolutnem smislu na dva načina, s pomočjo Routhovega stabilnostnega kriterija in iskanjem korenov karakteristične enačbe $1 + G(s)H(s) = 0$.

Ta dva načina nam dasta informacijo o tem, ali je sistem stabilen ali ne (absolutna stabilnost). Pri načrtovanju sistemov ta informacija ni zadostna. Zato v primeru načrtovanja sistemov uporabljamo metode, ki nam razen informacije o absolutni stabilnosti pokažejo tudi, koliko je sistem oddaljen od meje stabilnosti. To oddaljenost imenujemo *relativna stabilnost*. Nyquistov stabilnostni kriterij omogoča določitev absolutne in relativne stabilnosti.

2.3.1 Nyquistov stabilnostni kriterij

Karakteristični polinom sistema, ki ima v direktni veji prenosno funkcijo $G(s)$ in v povratni zanki $H(s)$, ima obliko

$$F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{K(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{s^j(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)}.$$

Relacije med poli in ničlami zaprtozančnega sistema in karakterističnega polinoma:

- predpostavimo $G(s)H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$, ničle polinoma $Q(s)$ imenujemo ničle odprtozančne prenosne funkcije;
- ničle polinoma $P(s)$ imenujemo poli odprtozančne prenosne funkcije $G(s)H(s)$;
- zaprtozančni poli so poli prenosne funkcije $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} = \frac{Q(s)}{P(s)+Q(s)}$ oz. ničle karakterističnega izraza $F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{P(s)+Q(s)}{P(s)}$ oz. koreni karakteristične enačbe $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$;
- poli karakterističnega izraza $F(s) = 1 + G(s)H(s) = \frac{P(s)+Q(s)}{P(s)}$ so enaki polom odprtozančne prenosne funkcije $G(s)H(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$;
- pogoj za zaprtozančno stabilnost je lega polov zaprtozančne prenosne funkcije oz. korenov karakteristične enačbe. Pogoj za stabilnost je lega zaprtozančnih polov v levem delu ravnine s .

Pri določevanju stabilnosti je potrebno preslikati celotno desno stran ravnine s , ki jo definira Nyquistova krivulja, preko kompleksne funkcije $F(s)$.

Definicije in lastnosti kompleksnih funkcij

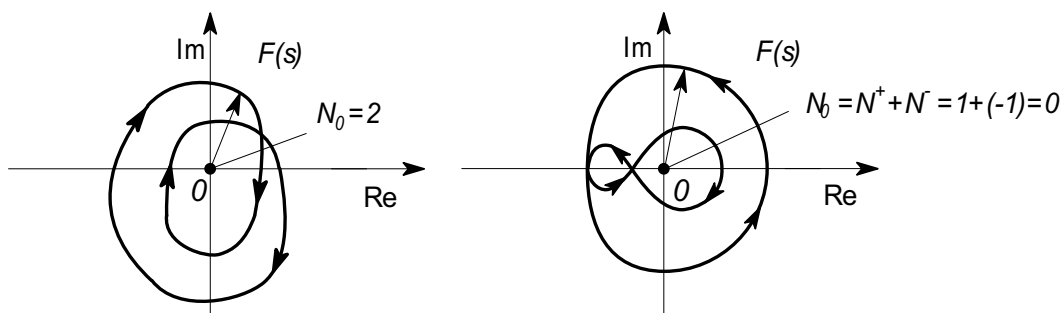
- Kompleksna funkcija $F(s)$ je *analitična* v nekem področju ravnine s , če za vsako točko s_0 tega področja velja, da obstaja odvod

$$\left. \frac{dF(s)}{ds} \right|_{s=s_0} = \lim_{s \rightarrow s_0} \left[\frac{F(s) - F(s_0)}{s - s_0} \right]$$

ki ima končno vrednost. Prenosna funkcija je analitična v vseh točkah ravnine s razen v polih.

- Točka, v kateri $F(s)$ ni analitična, je *singularna točka* ali singularnost kompleksne funkcije $F(s)$. Pol je torej singularnost.
- Neskončno zaporedje dotikajočih točk (v ravnini s ali ravnini $F(s)$) tvori *krivuljo*.
- Krivulja v kompleksni ravnini ima *smer*, ki jo označimo s puščico. Smer je določena z zaporedjem točk, ki tvorijo krivuljo (npr. zaporedje izbranih točk v ravnini s in zaporedje preslikanih točk v ravnini $F(s)$).
- Krivulja, ki se začne in konča v isti točki kompleksne ravnine, je *zaključena krivulja*.
- Zaključena krivulja v kompleksni ravnini N -krat *pozitivno obkroži* neko točko (npr. koordinatno izhodišče), če pri tem *radialna linija* iz te točke do točke na krivulji *rotira v smeri urinega kazalca* za kot $360^\circ \cdot N$, ob tem pa točka *prepotuje celotno zaključeno krivuljo*. Če je pot rotiranja v obratni smeri urinega kazalca, zaključena krivulja negativno obkrožuje koordinatno izhodišče. Celotno število obkrožitev N_0 je število obkrožitev v pozitivni smeri (N^+) minus število obkrožitev v negativni smeri (N^-) ($N_0 = N^+ + N^-$).

Slika 2.42 prikazuje dva primera. V prvem primeru zaključena krivulja 2x obkroži koordinatno izhodišče, v drugem primeru pa nobenkrat. Število



Slika 2.42: Število obkrožitev koordinatnega izhodišča

obkrožitev enostavno določimo tudi tako, da iz točke, glede na katero proučujemo obkrožitev, potegnemo poltrak v poljubno smer ter določimo vsa presečišča poltraka z zaključeno krivuljo. Če zaključena krivulja seka poltrak v smeri urinega kazalca, potem tako presečišče daje prispevek $+1$, sicer -1 v končno vsoto, ki določa število obkrožitev N_0 .

- $F(s)$ je *enolična funkcija* s . To pomeni, da vsaki točki s ustreza ena sama točka v ravnini $F(s)$. Preslikava iz $F(s)$ v s ni enolična.

- $F(s)$ je *analitična funkcija* razen v končnem številu singularnih točk v s ravnini.
- Vsaka zaključena krivulja v ravnini s se preslika v *zaključeno krivuljo* v ravnini $F(s)$.
- $F(s)$ je *konformna preslikava*. To pomeni, da se pri preslikavi ohranja kot (dva odseka, ki se sekata v ravnini s , se v ravnini $F(s)$ sekata pod istim kotom).
- Če s kompleksno funkcijo $F(s)$ preslikamo zaključeno krivuljo v ravnini s , je celotno število obkrožitev N_0 izhodišča, ki jih naredi krivulja $F(s)$ (v ravnini $F(s)$) enako *številu ničel Z_0 minus številu polov P_0 funkcije $F(s)$, ki so zajeti znotraj zaključene krivulje v ravnini s* (Cauchyev integral)

$$N_0 = Z_0 - P_0$$

Nyquistov diagram

Nyquistov diagram je preslikava Nyquistove krivulje preko preslikave $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ v ravnino $F(s)$. Nyquistova krivulja je zaključena krivulja, ki obkroži celotno desno s -polravnino in ne vsebuje singularnosti na imaginarni osi.

Primer 2.22. $\triangle$ *Proportionalni sistem (0. vrste) ima prenosno funkcijo*

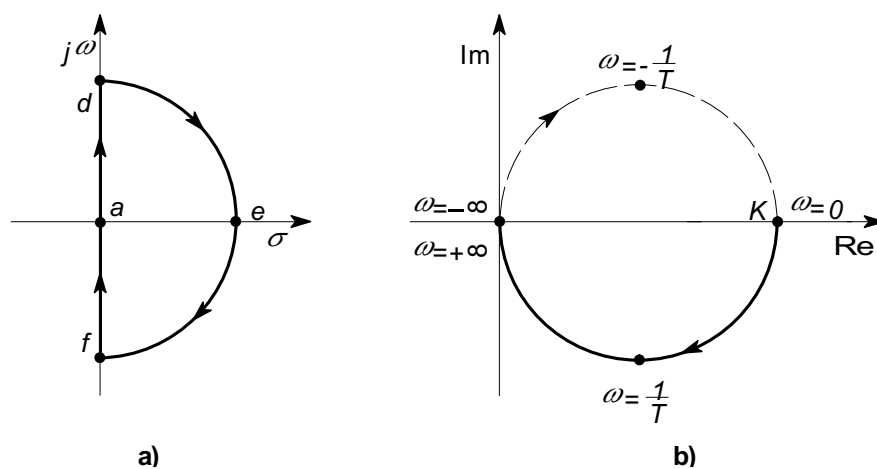
$$G(s)H(s) = \frac{K}{Ts + 1}.$$

$$G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta}} = \frac{K}{T \lim_{R \rightarrow \infty} Re^{j\theta} + 1} = 0$$

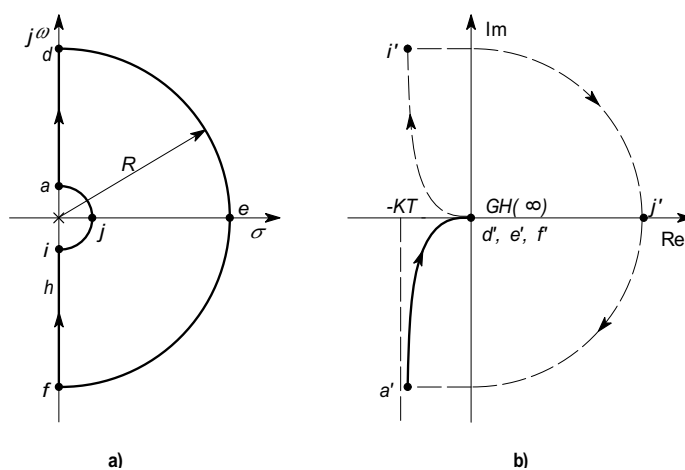
Primer 2.23. $\triangle$ *Sistem prve vrste ima prenosno funkcijo*

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}.$$

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta} (T \rho e^{j\theta} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho e^{j\theta}} = \infty e^{-j\theta}, \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \end{aligned}$$



Slika 2.43: Rešitev primera 2.22: Nyquistova krivulja (a), Nyquistov diagram (b)



Slika 2.44: Rešitev primera 2.23: Nyquistova krivulja (a), Nyquistov diagram (b)

Primer 2.24. $\triangle$ Sistem l -te vrste ima prenosno funkcijo

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^l(Ts + 1)}.$$

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big|_{s = \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^l e^{jl\theta} (T\rho e^{j\theta} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^l e^{jl\theta}} = \infty e^{-jl\theta}, \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \end{aligned}$$

Analiza stabilnosti

Analiza stabilnosti poteka tako, da določimo število obkrožitev koordinatnega izhodišča v ravnini $F(s)$. Toda ker imamo običajno dano odprtozančno prenosno funkcijo $G(s)H(s)$, ne pa karakterističnega izraza $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, lahko določimo stabilnostne lastnosti tako, da narišemo Nyquistov diagram odprtozančne prenosne funkcije $G(s)H(s)$, vendar moramo v tem primeru upoštevati število obkrožitev točke $-1 + j0$. Izhodišče v ravnini $F(s) = 1 + G(s)H(s)$ namreč ustreza točki $-1 + j0$ v ravnini $G(s)H(s)$.

Definirajmo N_0 , Z_0 in P_0 ter N_{-1} , Z_{-1} in P_{-1} :

- N_0 ... število obkrožitev koordinatnega izhodišča, ki jih naredi Nyquistov diagram prenosne funkcije $G(s)H(s)$,
- Z_0 ... število ničel $G(s)H(s)$, ki so v ravnini s obkrožene z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini,
- P_0 ... število polov $G(s)H(s)$, ki so v ravnini s obkrožene z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini,
- N_{-1} ... število obkrožitev točke $-1 + j0$, ki jih naredi Nyquistov diagram prenosne funkcije $G(s)H(s)$,
- Z_{-1} ... število ničel $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, ki so obkrožene v ravnini s z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini,
- P_{-1} ... število polov $F(s) = 1 + G(s)H(s)$, ki so obkroženi v ravnini s z Nyquistovo krivuljo, oz. ki ležijo v desni polravnini.

Poli prenosne funkcije $G(s)H(s)$ so identični polom $1 + G(s)H(s)$, zato velja za pole, ki ležijo v desnem delu ravnine s

$$P_0 = P_{-1}$$

Za stabilnost zaprtozančnega sistema se zahteva, da je število ničel $1 + G(s)H(s)$ v desni polravnini enako nič.

$$Z_{-1} = 0$$

Pri nadaljnjem izvajanju ne pozabimo na bistvo: zaprtozančno stabilnost določimo iz Nyquistovega diagrama odprtozančne prenosne funkcije $G(s)H(s)$.

$$N_{-1} = Z_{-1} - P_{-1} \quad \rightarrow \quad Z_{-1}$$

Zaprtozančni sistem je stabilen, če je število ničel $Z_{-1} = 0$. V primeru, ko je $Z_{-1} > 0$, predstavlja število polov zaprtozančnega sistema na desni strani s -ravnine.

Primer 2.25. $\triangle$ Odprtozančna prenosna funkcija je dana z

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s^2(sT + 1)},$$

kjer velja $K, T > 0$.

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big|_{s=\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho e^{j\theta}} &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^2 e^{j2\theta} (T\rho e^{j\theta} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^2 e^{j2\theta}} = \infty e^{-j2\theta}, \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ \\ &\quad -180^\circ \leq \theta_{Nyq} \leq 180^\circ, \end{aligned}$$

kjer je θ_{Nyq} kot, ki ga opiše Nyquistov diagram v neskončnosti.

$$\begin{aligned} G(s)H(s) \Big|_{s=\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho e^{j\theta}} &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{K}{\rho^2 e^{j2\theta} (T\rho e^{j\theta} + 1)} = \\ &= \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{K}{T\rho^3 e^{j3\theta}} = 0 e^{-j3\theta}, \quad 90^\circ \geq \theta \geq -90^\circ \\ &\quad -270^\circ \leq \theta_{Nyq} \leq 270^\circ \\ &\quad -90^\circ \leq \theta_{Nyq} \leq 90^\circ \end{aligned}$$

Število obkrožitev točke -1 je $N_{-1} = 2$ in število polov odprte zanke na desni strani $P_0 = 0$. Ker velja $N_{-1} = Z_{-1} - P_0$, iz tega sledi, da je $Z_{-1} = 2$. Obravnavani sistem je nestabilen ne glede na vrednost parametrov K in T .

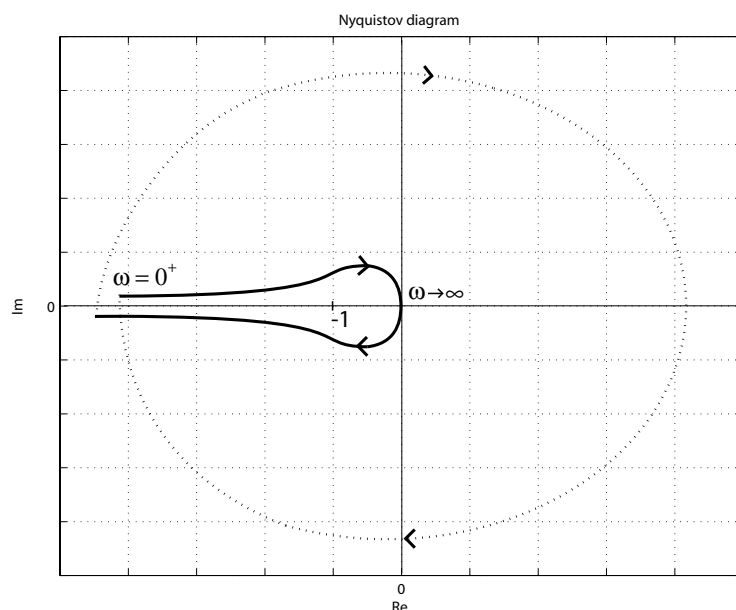
Primer 2.26. $\triangle$ Odprtozančna prenosna funkcija sistema je

$$G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{(s-1)(s+2)}, \quad K > 0.$$

Karakteristični polinom zaprtozančnega sistema $P_d(s)$ je

$$P_d(s) = s^2 + (K+1)s + (K-2).$$

S pomočjo Routhovega kriterija lahko ugotovimo, da je sistem stabilen za $K > 2$.



Slika 2.45: Rešitev primera 2.25

$$G(j\omega)H(j\omega) = \frac{-2K}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)} + j \frac{K(-3\omega - \omega^3)}{(1 + \omega^2)(4 + \omega^2)}$$

$$GH(j0) = \frac{-K}{2}$$

Nyquistov diagram pri ojačenju $K < 2$ prikazuje slika 2.46.

Odpertožančna prenosna funkcija ima en pol ($s = 1$) v desni polravnini, torej velja $P_0 = P_{-1} = 1$. Odpertožančni sistem je nestabilen. Nyquistov diagram kaže, da kritična točka $-1 + j0$ v primeru $K < 2$ ni obkrožena.

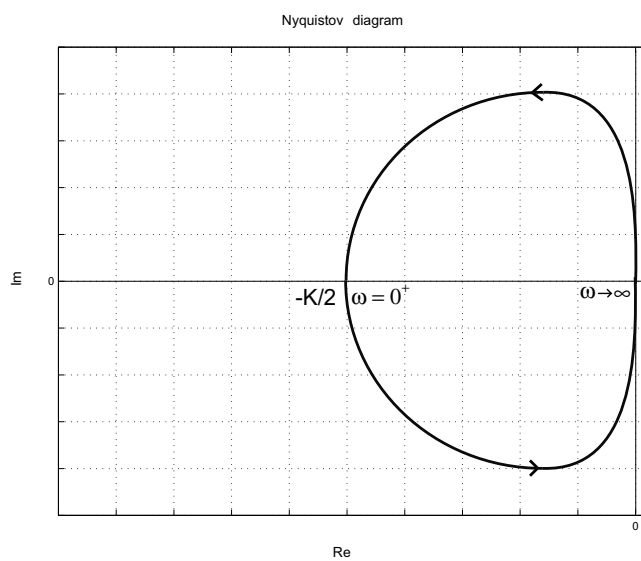
$$N_{-1} = 0$$

Ker velja $Z_{-1} = N_{-1} + P_0$, je $Z_{-1} = 1$, kar pomeni, da je zaprtožančni sistem nestabilen in da ima en pol v desni polravnini.

Nyquistov diagram pri ojačenju $K > 2$ prikazuje slika 2.47.

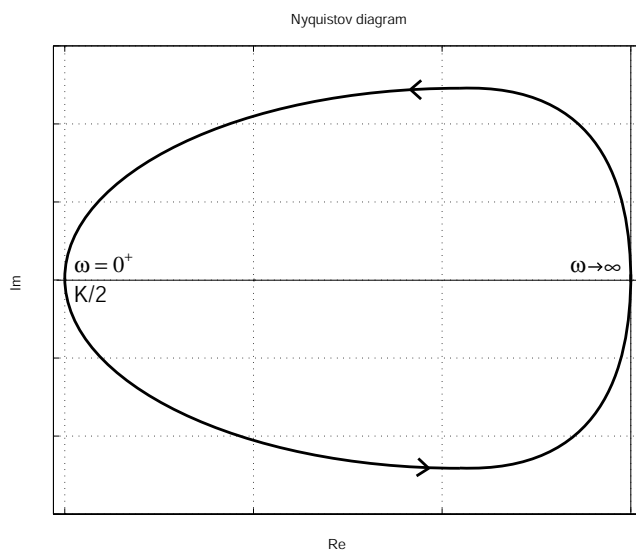
Odpertožančna prenosna funkcija ima en pol ($s = 1$) v desni polravnini, torej velja $P_0 = P_{-1} = 1$. Odpertožančni sistem je nestabilen. Nyquistov diagram kaže, da je kritična točka $-1 + j0$ v primeru $K > 2$ obkrožena v negativni smeri.

$$N_{-1} = -1$$



Slika 2.46: Rešitev primera 2.26a

Ker velja $Z_{-1} = N_{-1} + P_0$, je $Z_{-1} = 0$, kar pomeni, da je zaprtozančni sistem stabilen, ker nima polov v desni polravnini.



Slika 2.47: Rešitev primera 2.26b

2.3.2 Relativna stabilnost

Osnovna zahteva pri načrtovanju regulacijskih sistemov je zaprtozančna stabilnost. Za kvaliteto regulacije in zanesljivost pa je pomembna tudi mera o tem, kako oddaljen je sistem od meje stabilnosti. To mero definiramo kot *relativno stabilnost sistema*. Izrazimo jo s *faznim* in *ojačevalnim razločkom*.

Fazni razloček

Za določitev faznega razločka moramo določiti fazni kot

$$\Phi(\omega_1) = \angle[G(j\omega_1)H(j\omega_1)],$$

kjer je ω_1 frekvenca, pri kateri je absolutna vrednost frekvenčne karakteristike enaka 1

$$|G(j\omega_1)H(j\omega_1)| = 1$$

ali

$$20 \log |G(j\omega_1)H(j\omega_1)| = 0 \text{ dB}.$$

Fazni razloček (Φ_m) določa izraz

$$\Phi_m = 180^\circ + \Phi(\omega_1).$$

Če je $\Phi(\omega_1) > -180^\circ$, je $\Phi_m > 0$ in sistem je stabilen. Če je $\Phi(\omega_1) = -180^\circ$, je $\Phi_m = 0$ in zaprtozančni sistem je mejno stabilen. Če pa je $\Phi(\omega_1) < -180^\circ$, pa je $\Phi_m < 0$ in sistem je nestabilen. Stabilen sistem ima torej pozitiven fazni razloček.¹

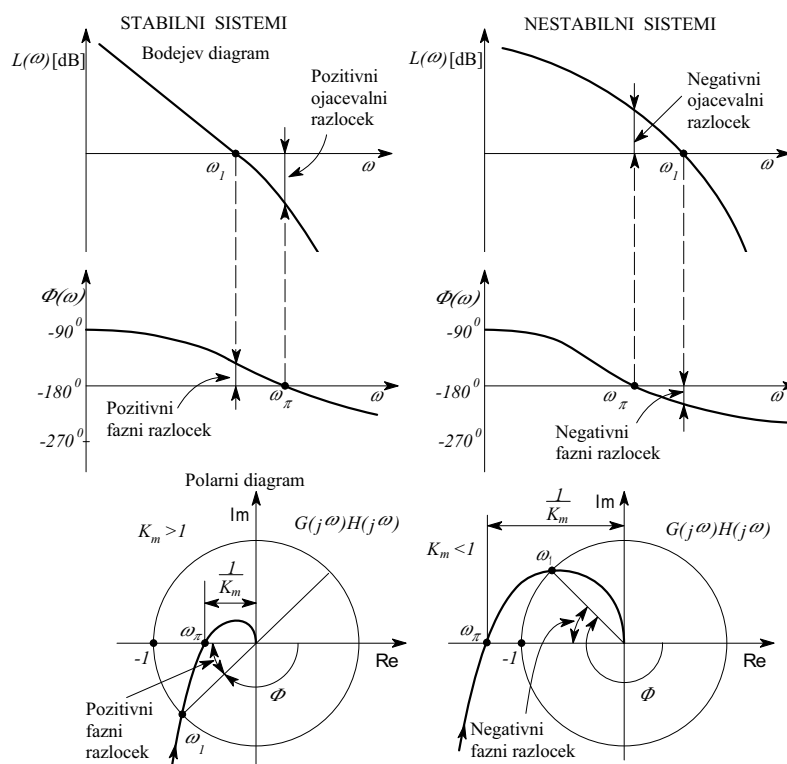
Slika 2.48 prikazuje fazni razloček stabilnega in nestabilnega sistema v Bodejevem in polarnem diagramu. V polarnem diagramu dobimo frekvenco ω_1 s presečiščem polarnega diagrama in enotinega kroga, v Bodejevem diagramu pa s presečiščem karakteristike (absolutne vrednosti) s premico pri 0 dB.

Ojačevalni razloček

Za določitev ojačevalnega razločka moramo določiti $|GH(j\omega_\pi)|$, kjer je ω_π frekvenca, pri kateri fazni kot doseže -180° ($\Phi(\omega_\pi) = -180^\circ$). Ojačevalni razloček (K_m) je

$$K_m = \frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|}$$

¹Velja le za sisteme z minimalno fazo



Slika 2.48: Ojačevalni in fazni razloček

oz. v dB

$$K_m[\text{dB}] = -20 \log |GH(j\omega_\pi)|.$$

Zaključek, da sta pri stabilnem povratnozančnem sistemu fazni in ojačevalni razloček pozitivna, velja le, če ima odprtozančna prenosna funkcija minimalno fazo.

2.3.3 Naloge

Primer 2.27. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+a)(s+b)}{s^3},$$

kjer je $a, b > 0$.

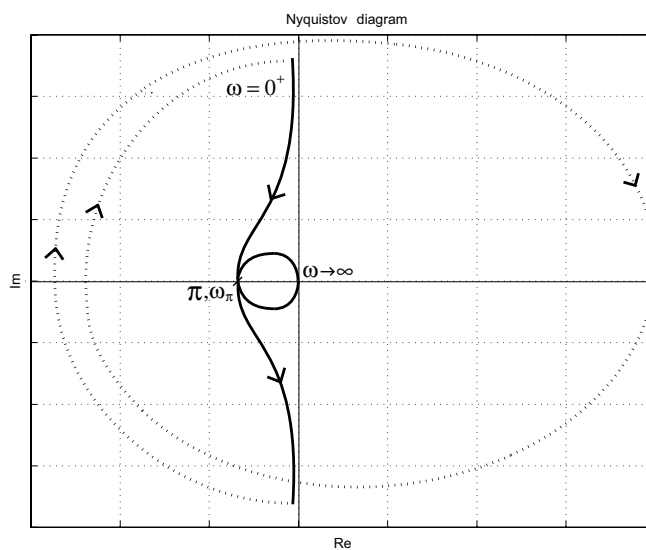
(a) Narišite Nyquistov diagram.

(b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.

(c) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema za $K > 0$.

Rešitev

(a) Nyquistov diagram: slika 2.49



Slika 2.49: Rešitev primera 2.27

(b) Karakteristični polinom: $1 + GH(s) = 0 \Rightarrow P_d(s)$

$$P_d = s^3 + Ks^2 + K(a+b)s + Kab$$

s^3	1	$K(a+b)$	$K > \frac{ab}{a+b}$
s^2	K	Kab	
s^1	$K(a+b) - ab$	0	
s^0	Kab		

(c)

$$GH(j\omega) = \frac{K(j\omega + a)(j\omega + b)}{(j\omega)^3} = -\frac{K(a+b)}{\omega^2} + j\frac{K(ab - \omega^2)}{\omega^3}$$

Poiščimo, kje Nyquistov diagram seka realno os:

$$\operatorname{Im}[GH(j\omega)] = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{ab}$$

$$\operatorname{Re}[GH(j\omega)] = -\frac{K(a+b)}{ab}$$

Stabilnost moramo preveriti v dveh primerih:

- a) kritična točka $(-1 + j0)$ je znotraj "malega kroga"
- b) kritična točka $(-1 + j0)$ je izven "malega kroga"

Iz slike 2.49 in enačbe $GH(s)$ sledi:

- a) $P_0 = 0$, $N_{-1} = 0$, $Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 0 \rightarrow$ stabilno
- b) $P_0 = 0$, $N_{-1} = 2$, $Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 2 \rightarrow$ nestabilno

Ker je sistem stabilen v primeru (a), sledi

$$\operatorname{Re}[GH(j\omega)] = \frac{-K(a+b)}{ab} < -1 \implies K > \frac{ab}{a+b}$$

Primer 2.28. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

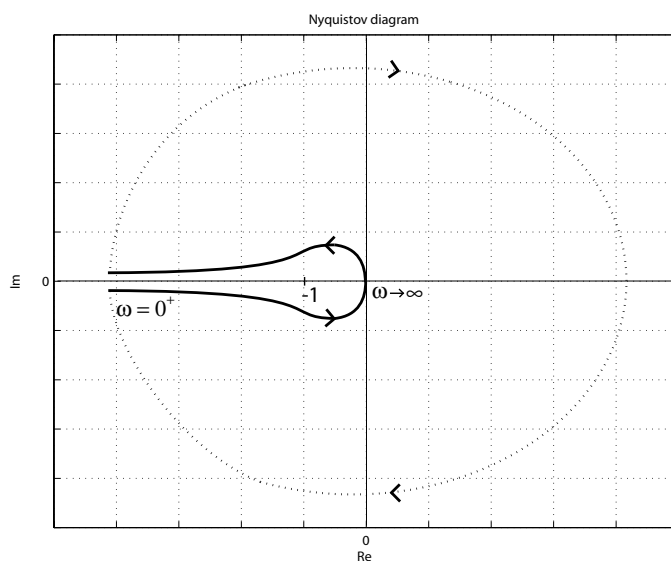
$$GH(s) = \frac{K(s+a)}{s^2},$$

kjer je $a > 0$.

- (a) Narišite Nyquistov diagram.
- (b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.
- (c) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema za $K > 0$.

Rešitev

- (a) Nyquistov diagram: slika 2.50
- (b) $P_d = s^2 + Ks + Ka$



Slika 2.50: Rešitev primera 2.28

s^2	1	Ka	$K > 0$
s^1	K	0	
s^0	Ka		

$$(c) \quad N_{-1} = 0 \quad P_0 = 0 \quad Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 0$$

Sistem je stabilen za vsak $K > 0$

Primer 2.29. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K}{s(1 + sT_1)(1 + sT_2)},$$

kjer je $T_1, T_2 > 0$.

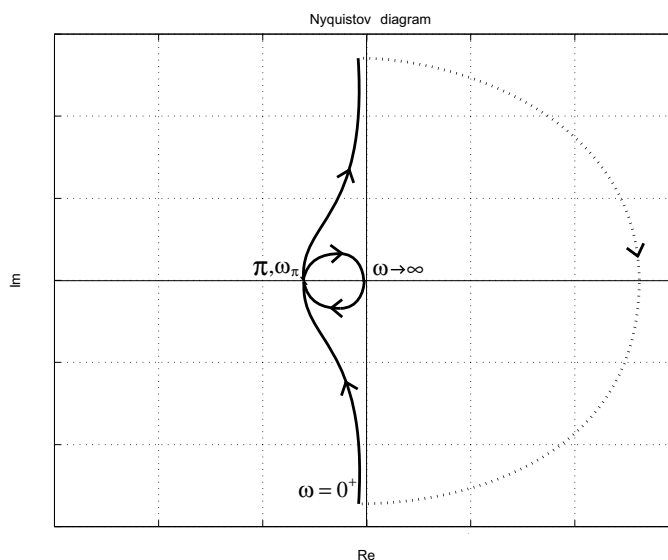
(a) Narišite Nyquistov diagram.

(b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.

(c) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema za $K > 0$.

Rešitev

(a) Nyquistov diagram: slika 2.51



Slika 2.51: Rešitev primera 2.29

(b) $P_{cl} = T_1 T_2 s^3 + (T_1 + T_2) s^2 + s + K$

s^3	$T_1 T_2$	1	$K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$
s^2	$T_1 + T_2$	K	
s^1	$\frac{T_1 + T_2 - K T_1 T_2}{T_1 + T_2}$	0	
s^0	K		

(c) Zaprtozančni sistem je stabilen v primeru (b) (slika 2.51): $P_0 = 0$, $N_{-1} = 0$, $Z_{-1} = 0$.

$$GH(j\omega) = -\frac{K(T_1 + T_2)}{(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)} - j \frac{K(1 - \omega^2 T_1 T_2)}{\omega(1 + \omega^2 T_1^2)(1 + \omega^2 T_2^2)}$$

$$\text{Im}[GH(j\omega_\pi)] = 0 \implies \omega_\pi = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$

$$\text{Re}[GH(j\omega_\pi)] = -\frac{K T_1 T_2}{T_1 + T_2} > -1 \implies K < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}$$

Primer 2.30. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

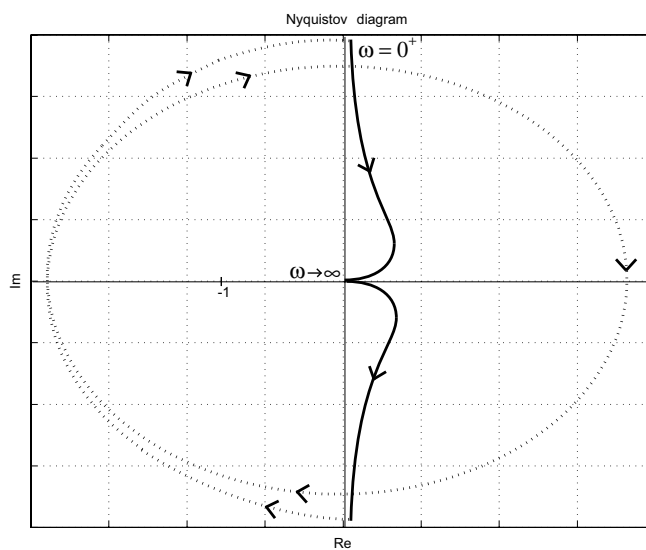
$$GH(s) = \frac{K}{s^3(s+1)},$$

kjer je $K > 0$.

- (a) Narišite Nyquistov diagram.
- (b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.
- (c) Stabilnost obravnavajte z Nyquistovim kriterijem za $K > 0$.

Rešitev

- (a) Nyquistov diagram: slika 2.52.



Slika 2.52: Rešitev primera 2.30

$$GH(s) \Big|_{s=\rho e^{j\Theta}} = \frac{K}{\rho^3 e^{j3\Theta} (\rho e^{j\Theta} + 1)}$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} GH(\rho e^{j\Theta}) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{K}{\rho^3} \angle -3\Theta, \quad 0^0 \leq \Theta \leq 90^0$$

$$(b) \quad 1 + GH(s) = 0 \rightarrow s^4 + s^3 + K = 0$$

s^4	1	0	K
s^3	1	0	0
s^2	0^ϵ	K	
s^1	$-\frac{K}{\epsilon}$		
s^0	K		

Nestabilen za vsak $K > 0$

(c) $P_0 = 0, \quad N_{-1} = 2, \quad Z_{-1} = P_0 + N_{-1} = 2$

Zaprtozančni sistem je nestabilen za vsak $K > 0$.

Primer 2.31. *Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema*

$$GH(s) = \frac{K}{s^4(s+1)},$$

kjer je $K > 0$.

(a) *Narišite Nyquistov diagram.*

(b) *Obravnavajte stabilnost zaprtozančnega sistema z enotino povratno zanko po Routhovem kriteriju.*

(c) *Obravnavajte stabilnost zaprtozančnega sistema z enotino povratno zanko po Nyquistovem kriteriju.*

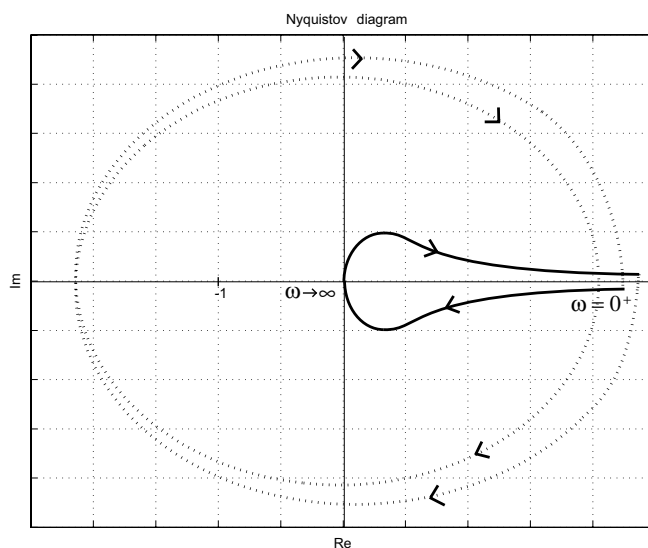
Rešitev

(a) *Nyquistov diagram: slika 2.53.*

(b)

$$1 + GH(s) = s^5 + s^4 + K$$

s^5	1	0	0
s^4	1	0	K
s^3	0^ϵ	K	0
s^2	$-\frac{K}{\epsilon}$	K	
s^1	$K + \epsilon^2$	0	
s^0	K		



Slika 2.53: Rešitev primera 2.31

(c) $P_0 = 0$, $N_{-1} = 2$, $Z_{-1} = 2$

Zaprtozančni sistem je nestabilen za vsak $K > 0$.

Primer 2.32. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+b)(s+c)},$$

kjer je $0 < a < b < c$.

(a) Narišite Nyquistov diagram.

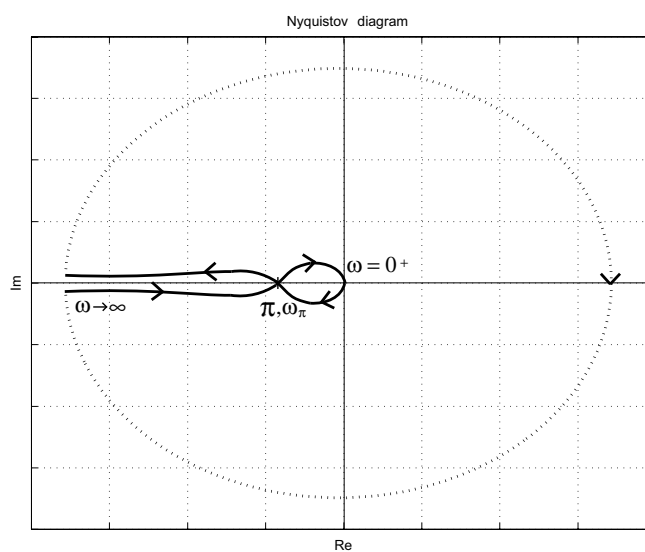
(b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.

(c) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema za $K > 0$.

Rešitev

(a) Nyquistov diagram: slika 2.54.

(b) $P_{cl} = s^4 + (b+c)s^3 + bcs^2 + Ks + Ka$



Slika 2.54: Rešitev primera 2.32

s^4	1	bc	Ka
s^3	$b+c$	K	0
s^2	$bc - \frac{K}{b+c}$	Ka	0
s^1	A	0	
s^0	B		

$$A = \frac{K(bc - \frac{K}{b+c}) - Ka(b+c)}{bc - \frac{K}{b+c}} > 0 \Rightarrow K < (b+c)(bc - ac - ab)$$

$$B = Ka > 0 \Rightarrow K > 0$$

$$(c) \quad GH(j\omega) = -\frac{K(abc+c\omega^2+(b-a)\omega^2)}{\omega^2(b^2+\omega^2)(c^2+\omega^2)} + j\frac{K((a-b)c\omega+ab\omega+\omega^3)}{\omega^2(b^2+\omega^2)(c^2+\omega^2)}$$

$$\text{Im}[GH(j\omega)] = 0 \Rightarrow \omega = \pm\sqrt{-ab-ac+bc}$$

$$\text{Zaprtozančni sistem bo stabilen v primeru, ko bo } \text{Re}[GH(j\omega)] = \frac{K}{(b+c)(-bc+a(b+c))} < -1 \Rightarrow K < (b+c)(bc - ac - ab).$$

$$P_0 = 0, \quad N_{-1} = 0, \quad Z_{-1} = 0$$

Primer 2.33. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{3}{s(s+1)^2},$$

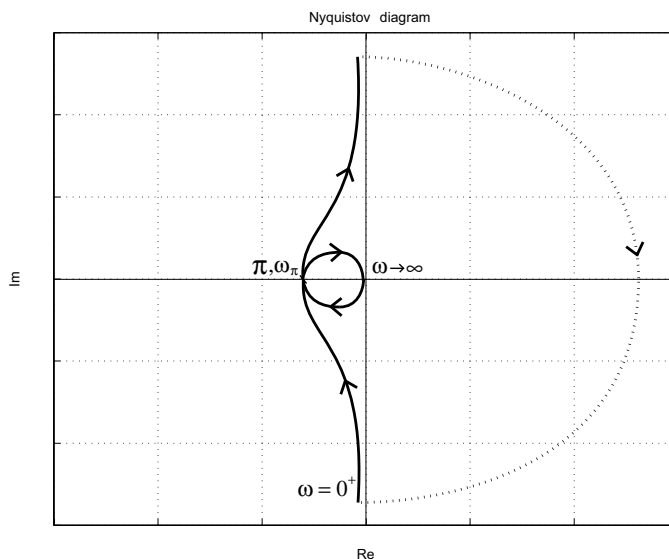
- (a) Narišite Nyquistov diagram.
- (b) Obravnavajte stabilnost zaprtozančnega sistema z enotino povratno zanko z Routhovim kriterijem.
- (c) Obravnavajte stabilnost zaprtozančnega sistema z enotino povratno zanko z Nyquistovim kriterijem.
- (d) Predpostavimo, da je sistemu v direktni veji dodano ojačenje K . Poiščite K tako, da bo sistem mejno stabilen, in določite frekvenco oscilacij.

Rešitev

- (a) Nyquistov diagram: slika 2.55.

$$\left. GH(j\omega) \right|_{j\omega=j0^+} = \frac{3}{\omega} \angle -90^\circ \Big|_{\omega=0^+}$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{3}{\omega^3} \angle -270^\circ$$



Slika 2.55: Rešitev primera 2.33

(b) $P_{cl} = s^3 + 2s^2 + s + 3$

s^3	1	1
s^2	2	3
s^1	$-\frac{1}{2}$	0
s^0	3	

Vrednost v vrstici pri s^1 je negativna, torej je zaprtozančni sistem $\frac{GH}{1+GH}$ nestabilen. V prvem stolpcu se predznak dvakrat zamenja ($2 \rightarrow -\frac{1}{2}$ in $-\frac{1}{2} \rightarrow 3$), torej ima zaprtozančni sistem dva nestabilna pola.

(c) $N_{-1} = 2, P_0 = 0 \Rightarrow Z_{-1} = 2$

Zaprtozančni sistem ima dva pola v desni polravnini, zato je sistem nestabilen.

(d) Sistem bo mejno stabilen, ko bo Nyquistova krivulja na sliki 2.55 sekala točko $-1 + j0$.

$$P_{cl} = s^3 + 2s^2 + s + 3K$$

s^3	1	1
s^2	2	$3K$
s^1	$\frac{2-3K}{2}$	0
s^0	$3K$	

Sistem je mejno stabilen pri $K = \frac{2}{3}$ in oscilira s frekvenco $\omega_o = 1$ rad/s.

Primer 2.34. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{0,707(s+1)}{s^2}.$$

(a) Narišite Nyquistov diagram.

(b) Poiščite frekvenco, kjer je $|GH(j\omega)| = 1$ in fazni razloček.

(c) Poiščite amplitudni razloček.

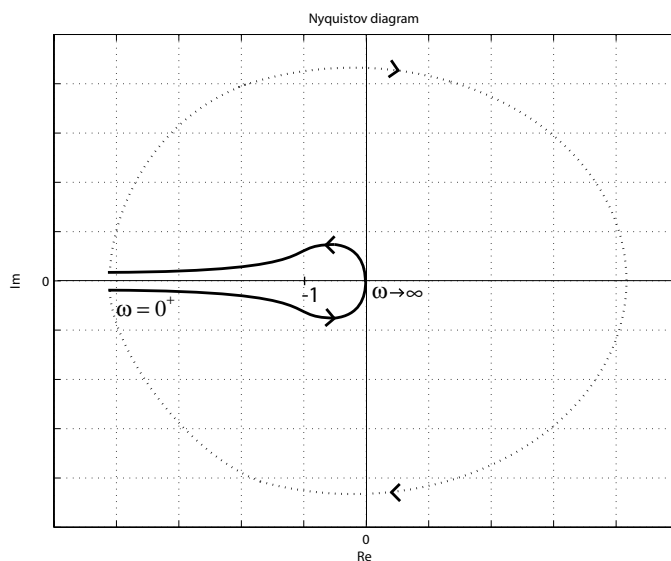
(d) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema.

Rešitev

(a) *Nyquistov diagram: slika 2.56.*

$$G(j0^+) \rightarrow \frac{0,707}{(0^+)^2} \angle -180^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{0,707}{\infty} \angle -90^\circ$$



Slika 2.56: Rešitev primera 2.34

$$(b) |GH(j\omega_1)| = \sqrt{\left(-\frac{0,707}{\omega_1^2}\right)^2 + \left(-\frac{0,707}{\omega_1}\right)^2} = 1 \Rightarrow \omega_1 = 1$$

$$\phi_m = 180^\circ + \angle[GH(j\omega_1)] = 45^\circ$$

(c) $\angle[GH(j\omega_\pi)] = -180^\circ \Rightarrow \omega_\pi$ ne obstaja, ker Nyquistov diagram ne seka imaginarne osi. Amplitudni razloček je v tem primeru $K_m = \infty$.

(d) $P_0 = 0, N_{-1} = 0 \Rightarrow Z_{-1} = 0$
Zaprtozančni sistem je stabilen za vsak $K > 0$.

Primer 2.35. Narišite Nyquistove diagrame za naslednje odprtozančne funkcije in obravnavajte stabilnost:

(a) $G(s) = \frac{s+10}{s};$

$$(b) \quad G(s) = \frac{1}{(s+0.1)(s+1)};$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{s+1}{s^2};$$

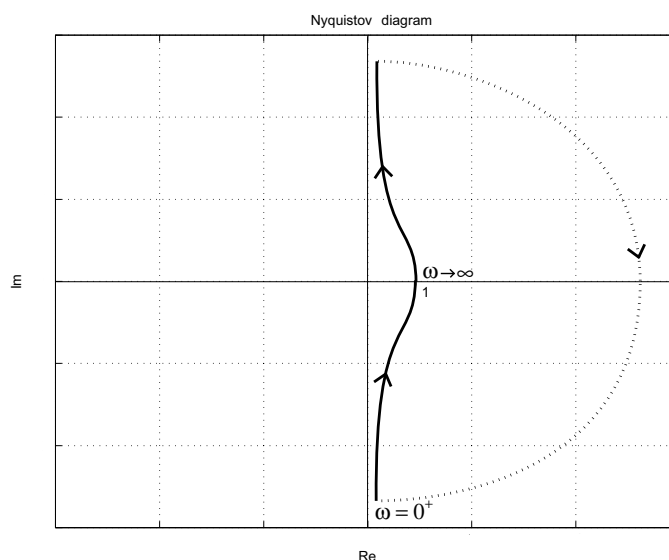
$$(d) \quad G(s) = \frac{100}{s^2(s+1)}.$$

Rešitev

(a) Slika 2.57.

$$G(j0^+) = \frac{10}{(0^+)^2} \angle -90^0, \quad G(j\infty) = 1$$

$$Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{stabilen}$$



Slika 2.57: Rešitev primera 2.35 a

(b) Slika 2.58.

$$G(j0^+) = 10, \quad G(j\infty) \rightarrow \frac{1}{\infty^2} \angle -180^0$$

$$Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{stabilen}$$

(c) Slika 2.59.

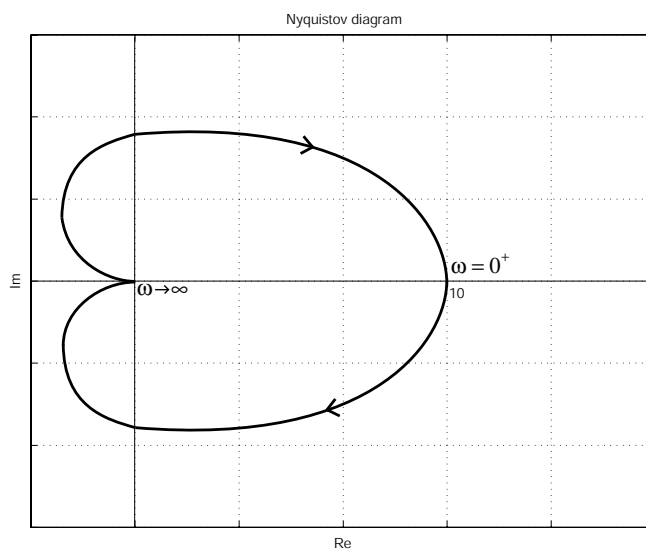
$$G(j0^+) \rightarrow \frac{1}{(0^+)^2} \angle -180^0, \quad G(j\infty) \rightarrow \frac{1}{\omega} \angle -90^0$$

$$Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \text{stabilen}$$

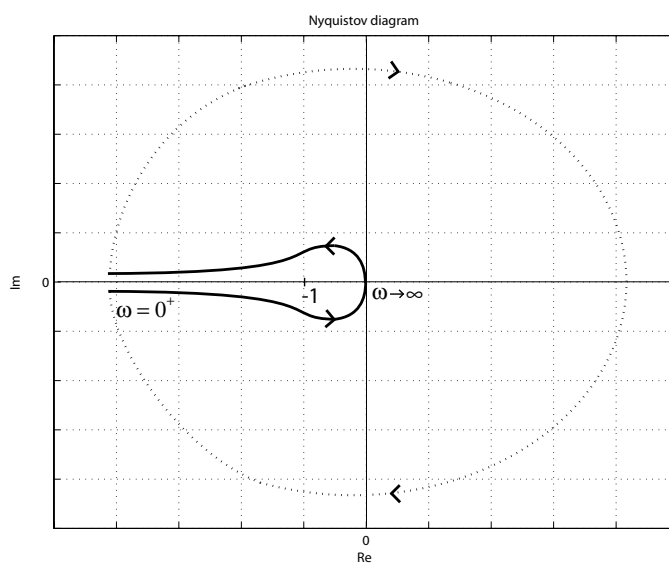
(d) Slika 2.60.

$$G(j0^+) \rightarrow \frac{100}{(0^+)^2} \angle -180^0, \quad G(j\infty) \rightarrow \frac{1}{(\omega)^3} \angle -270^0$$

$$Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 2 + 0 = 2 \Rightarrow \text{nestabilen}$$



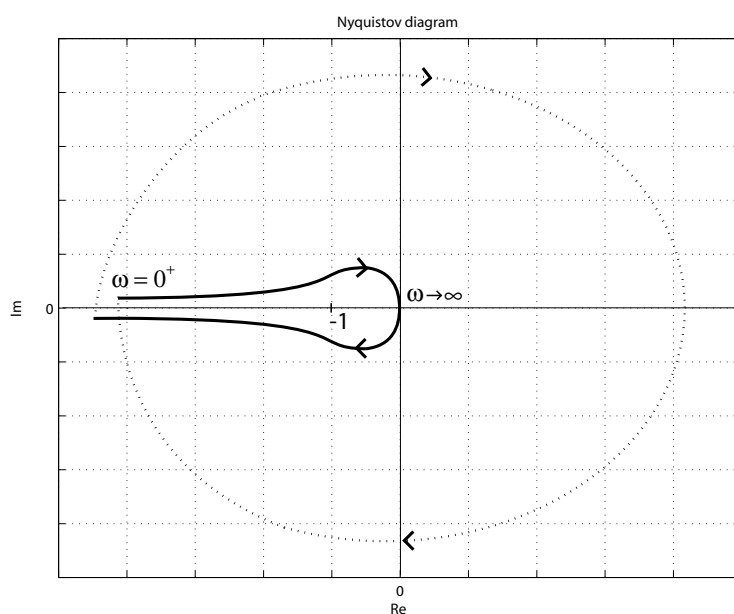
Slika 2.58: Rešitev primera 2.35b



Slika 2.59: Rešitev primera 2.35c

Primer 2.36. Za sistem, ki ima v direktni veji prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{50K}{s(s+2)^3},$$



Slika 2.60: Rešitev primera 2.35d

in v negativni povratni zanki

$$H(s) = 0.2,$$

(a) narišite Nyquistov diagram za $K = 1$.

(b) Poiščite K tako, da bo sistem stabilen.

Rešitev

(a) Nyquistov diagram: slika 2.61.

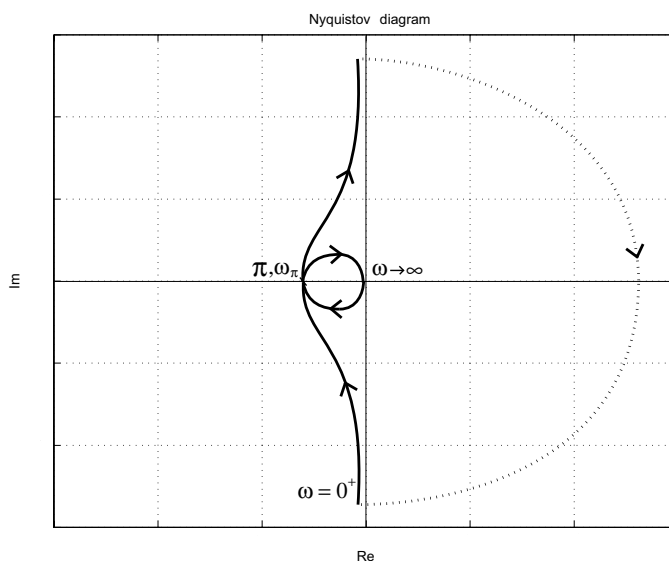
$$GH(j0^+) \rightarrow \frac{10}{(0^+)} \angle -90^\circ, \quad GH(j\infty) \rightarrow \frac{10}{\omega^4} \angle 0^\circ$$

(b) Da bo sistem stabilen, mora biti K :

$$GH(j\omega) = \frac{-120K + 10K\omega^2}{(4 + \omega^2)^3} + j \frac{-80K + 60K\omega^2}{\omega(4 + \omega^2)^3}$$

$$\text{Im}[GH(j\omega)] = 0 \Rightarrow \omega_\pi, \quad \omega_\pi = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Re}[GH(j\omega)] > -1 \Rightarrow \text{stabilno za } 0 < K < 1,42$$



Slika 2.61: Rešitev primera 2.36

Primer 2.37. Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost zaprtozančnega sistema z enotino povratno zanko, če predpostavimo naslednje odprtozančne prenosne funkcije:

$$(a) \quad G(s) = \frac{100}{(s+1)(s-1)};$$

$$(b) \quad G(s) = \frac{1-s}{s+1};$$

$$(c) \quad G(s) = \frac{-s}{(s+1)(s-1)};$$

$$(d) \quad G(s) = \frac{1-s}{s(s+1)};$$

Rešitev

$$(a) \quad G(j0^+) = -100 \angle -180^\circ, \quad G(j\infty) \rightarrow \frac{100}{(\omega)^2} \angle -180^\circ$$

$$G(j\omega) = \frac{100}{(\omega^2+1)} \angle -180^\circ$$

Nyquistova krivulja gre skozi točko $-1 + j0 \Rightarrow$ mejno stabilen sistem

$$(b) \quad G(j0^+) = 1, \quad G(j\infty) = -1 = 1 \angle -180^\circ$$

$$|G(j\omega)| = 1, \forall \omega$$

Nyquistova krivulja gre skozi točko $-1 + j0 \Rightarrow$ mejno stabilen sistem

$$(c) \quad G(j0^+) = 0^+ \angle 90^0, \quad G(j\infty) \rightarrow -\frac{1}{j\infty} = \frac{1}{\infty} \angle -270^0$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega}{(\omega^2+1)} \angle 90^0$$

$$Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 0 + 1 = 1 \Rightarrow \text{nestabilen sistem}$$

$$(d) \quad G(j\omega) = -\frac{2}{(\omega^2+1)} - j\frac{1-\omega^2}{\omega(\omega^2+1)}, \quad G(j0^+) = -2 - j\infty,$$

$$G(j1) = -1 + j0;$$

Nyquistova krivulja gre skozi točko $-1 + j0 \Rightarrow$ mejno stabilen sistem

Primer 2.38. Imamo odprtozančno prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{K}{s(s-1)}.$$

(a) Narišite Nyquistov diagram.

(b) Predpostavimo, da je v odprtozančno prenosno funkcijo dodano ojačenje -1 tako, da je nova odprtozančna funkcija enaka $G(s) = \frac{K}{s(1-s)}$. Narišite Nyquistov diagram novega sistema tako, da si pomagata z rezultatom iz naloge (a).

Rešitev

(a) Nyquistov diagram: slika 2.62.

$$G(j0^+) \rightarrow \frac{K}{-j\omega} = \infty \angle -270^0$$

$$G(j\infty) \rightarrow \frac{K}{(j\omega)^2} = 0 \angle -180^0$$

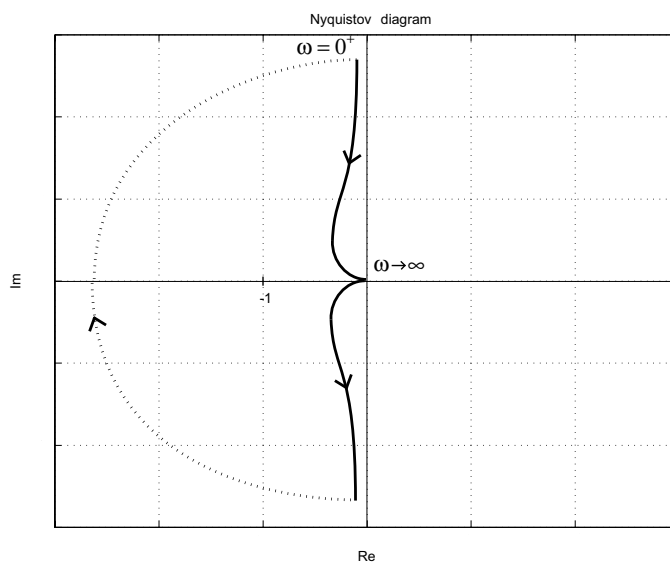
$$Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow \text{nestabilen sistem}$$

(b) Diagram iz naloge (a) zrcalimo preko koordinatnega izhodišča: slika 2.63.

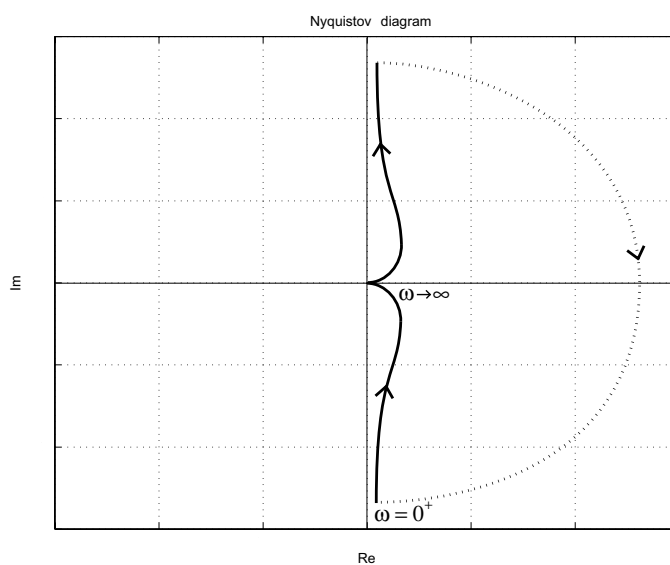
$$-G(j\omega) = G(j\omega)(1 \angle -180^0)$$

Primer 2.39. Nyquistovi diagrami podobnih odprtozančnih funkcij.

(a) Kakšna je razlika v Nyquistovih diagramih odprtozančnih funkcij $G(s)$ in $-G(s)$.



Slika 2.62: Rešitev primera 2.38a



Slika 2.63: Rešitev primera 2.38b

(b) Kakšna je razlika med Nyquistovim diagramom prenosne funkcije

$$G_1(s) = \frac{K(s+z)}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

in

$$G_2(s) = \frac{K(s - z)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

(c) Narišite Nyquistov diagram pri vrednostih $z = 5$, $p_1 = 1$, $p_2 = 10$ in $K = 4$.

Rešitev:

(a) $-G(s)$ je preslikava $G(s)$ preko koordinatnega izhodišča.

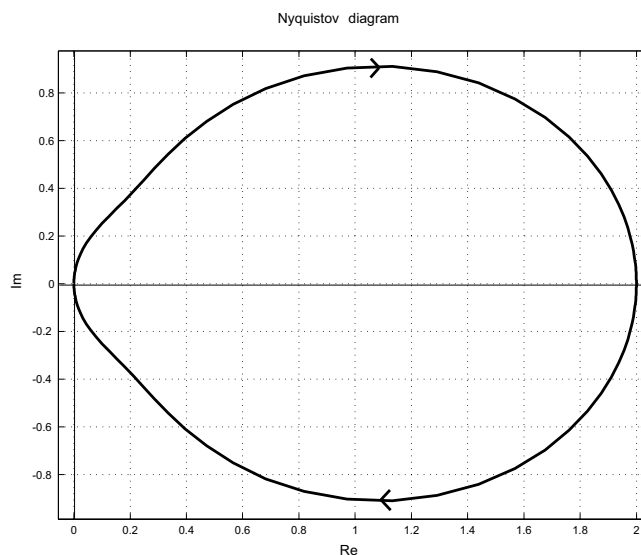
Diagram iz naloge (a) zrcalimo preko koordinatnega izhodišča. $-G(j\omega) = G(j\omega)(1 \angle -180^\circ)$

(b) $G_2(s)$ dobimo kot preslikavo $G_1(s)$ preko realne osi in nato rotacijo za -180° .

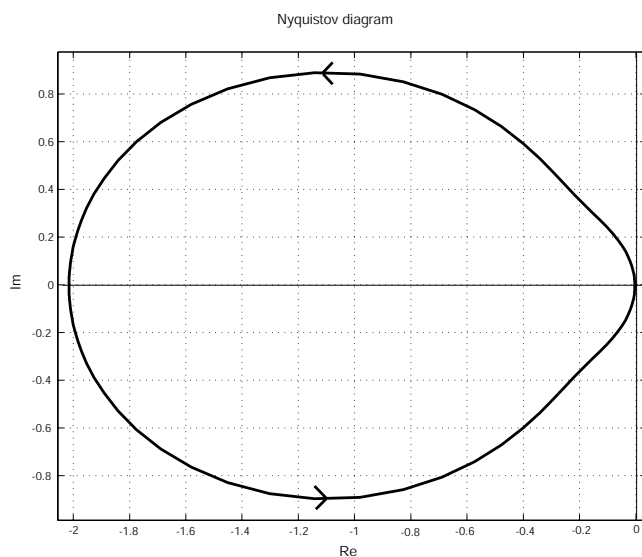
$$G_1(j\omega) = \frac{Km1 \angle \Theta_z}{m2 \angle \Theta_{p1} m3 \angle \Theta_{p2}} = M_1 \angle (\Theta_z - \Theta_{p1} - \Theta_{p2}) = M_1 \angle \Theta_1,$$

$$G_2(j\omega) = \frac{Km1 \angle (180^\circ - \Theta_z)}{m2 \angle (180^\circ - \Theta_{p1}) m3 \angle (180^\circ - \Theta_{p2})} = M_1 \angle (-(\Theta_z - \Theta_{p1} - \Theta_{p2}) - 180^\circ) = M_1 \angle (-\Theta_1 - 180^\circ) = M_1 \angle (180^\circ - \Theta_1),$$

(c) Nyquistov diagram za $G_1(s)$ je prikazan na sliki 2.64, za $G_2(s)$ pa na sliki 2.65.



Slika 2.64: Rešitev primera 2.39a

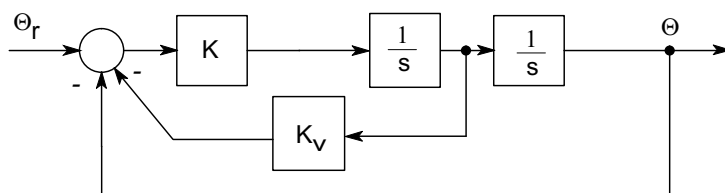


Slika 2.65: Rešitev primera 2.39b

Primer 2.40. Predpostavimo prenosno funkcijo med kotom zasuka Θ in momentom M , ki deluje na satelit. Predstavljata jo dva integratorja

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{M(s)} = \frac{1}{s^2}.$$

Vodljivostna shema za satelit je prikazana na sliki 2.66



Slika 2.66: Vodljivostna shema satelita iz primera 2.40

- (a) Določite odprtozančno prenosno funkcijo sistema ($G_{OL}(s)$).
- (b) Narišite Nyquistov diagram pri vrednostih $K > 0$ in $K_v = 0$.
- (c) Z Nyquistovim kriterijem določite pogoj za K_v , da bo sistem stabilen.

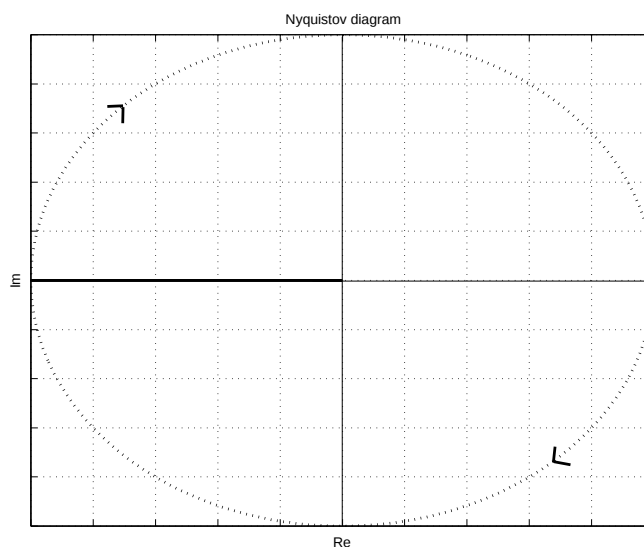
Rešitev

$$(a) \quad G_{OL}(s) = \frac{K}{s(s+KK_v)}$$

(b) Nyquistov diagram: slika 2.67.

$$G_{OL}(s) = \frac{K}{s^2} \Rightarrow G_{OL}(j\omega) = -\frac{K}{\omega^2}$$

Nyquistova krivulja gre skozi točko $-1 + j0 \Rightarrow$ mejno stabilen sistem



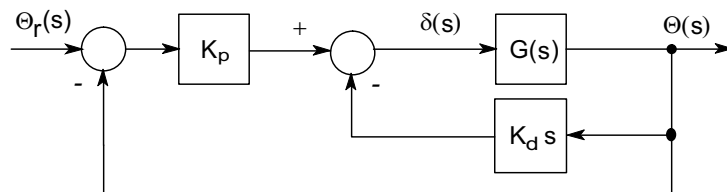
Slika 2.67: Rešitev primera 2.40

(c) Sistem je mejno stabilen za vsak $K_v > 0$.

Primer 2.41. Shema vodenja kota elevacije rakete je na sliki 2.68. Poenostavljena prenosna funkcija med kotom zasuka izpušne šobe δ in kotom elevacije Θ je

$$G(s) = \frac{\Theta(s)}{\delta(s)} = \frac{1}{s^2 - 0.04}.$$

(a) Z Nyquistovim kriterijem določite relacijo med K_p in K_d , da bo sistem stabilen.



Slika 2.68: Vodljivostna shema rakete iz primera 2.41

Rešitev:

(a) Odprtozančno prenosno funkcijo lahko izrazimo kot $G_{OL}(s) = (sK_d + K_p)G(s)$.

$$G_{OL}(j\omega) = (j\omega K_d + K_p) \frac{1}{(-\omega^2 - 0.04)}$$

$$G_{OL}(j0^+) = -\frac{K_p}{0.04} = \frac{K_p}{0.04} \angle -180^\circ$$

$$G_{OL}(j\infty) \rightarrow \frac{K_d}{j\omega} = 0 \angle -90^\circ$$

Sistem je stabilen, če velja $K_d > 0$ in hkrati $K_p > 0.04$. $Z_{-1} = N_{-1} + P_0 = -1 + 1 = 0$ ($N_{-1} = -1$ zaradi smeri obkrožitve točke $-1 + j0$).

Primer 2.42. V programskem okolju Matlab napišite M-funkcijo, ki nariše Nyquistov diagram z navideznimi krogi v neskončnosti.

Rešitev

```
function [] = nyq_orig(num,den,wmax,dw)
% function [] = nyq_global(num,den,wmax,dw)
%
% num      stevec
% den      imenovalec
% wmax     maksimalna frekvenca
% dw       korak frekvence

% Stevilo izracunov na posamezni osi
N=1000;
%
% Negativni del imaginarne osi
for k=1:N,
    wn(k,1)=0-j*wmax+(k-1)*j*dw;
end w.nyq{1}=wn;
%
```

```

% Infinitezimalna obkrožitev koordinatnega središča
fi=-pi/2:0.01:pi/2; w.nyq{2}=(dw*exp(j*fi))';
%
% Pozitivni del imaginarne osi
for k=1:N-1,
    wp(k,1)=0+j*k*dw;
end w.nyq{3}=wp;

for i=1:3,
    xnum=polyval(num,w.nyq{i});
    xden=polyval(den,w.nyq{i});

    absnum=abs(xnum);
    absden=abs(xden);

    fazanum=angle(xnum);
    fazaden=angle(xden);

    mag=absnum./absden;
    faza=fazanum-fazaden;

    re=mag.*cos(faza);
    im=mag.*sin(faza);

    if i==2,
        plot(re,im,'k:')
    else
        plot(re,im,'k')
    end

    hold on
end

title('Nyquistov diagram'); xlabel('Re'); ylabel('Im'); grid hold
off

```

Primer 2.43. Imamo odprtozančno prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}.$$

- (a) Narišite Nyquistov diagram za sistem za $K > 0$ in za $K < 0$.
- (b) Določite interval K , na katerem je zaprtozančni sistem stabilen.

Rešitev

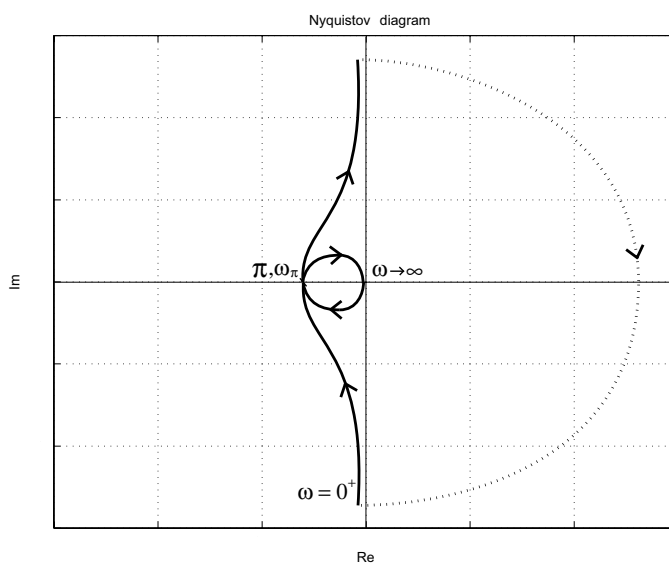
(a) Nyquistov diagram za $K > 0$ je prikazan na sliki 2.69, za $K < 0$ pa na sliki 2.70.

$$G(j\omega) = \frac{-2K}{(1+\omega^2)^2} - j \frac{K\omega(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^2}$$

$$G(j0^+) = -2K - j\infty$$

$$G(j\infty) = 0 \angle -270^\circ$$

$$\text{Im}[G(j\omega_\pi)] = 0 \rightarrow \omega_\pi \rightarrow \Pi = G(j\omega_\pi); G(j\omega_\pi) = -\frac{K}{2} + j0, \omega_\pi = \pm 1$$



Slika 2.69: Rešitev primera 2.43a

(b) Zaprtizančni sistem bo stabilen, če velja $K > 0$ in $\text{Im}[G(j\omega_\pi)] > -1 \rightarrow 0 < K < 2$.

Primer 2.44. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

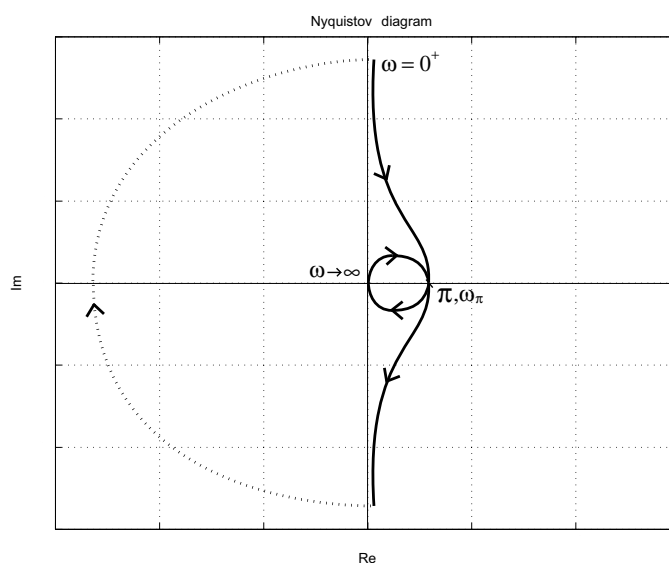
$$GH(s) = \frac{K}{s^2(sT + 1)},$$

kjer je $T > 0$.

(a) Narišite Nyquistov diagram.

(b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.

(c) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema za $K > 0$.



Slika 2.70: Rešitev primera 2.43b

Rešitev

(a) Nyquistov diagram: slika 2.71.

$$G(j0^+) \rightarrow G(j0^+) = \frac{K}{(j0^+)^2} = \infty \angle -180^\circ$$

$$G(j\infty) \rightarrow G(j\infty) = \frac{K}{(j\infty)^3} = 0 \angle -270^\circ$$

(b) $1 + GH(s) = Ts^3 + s^2 + K$

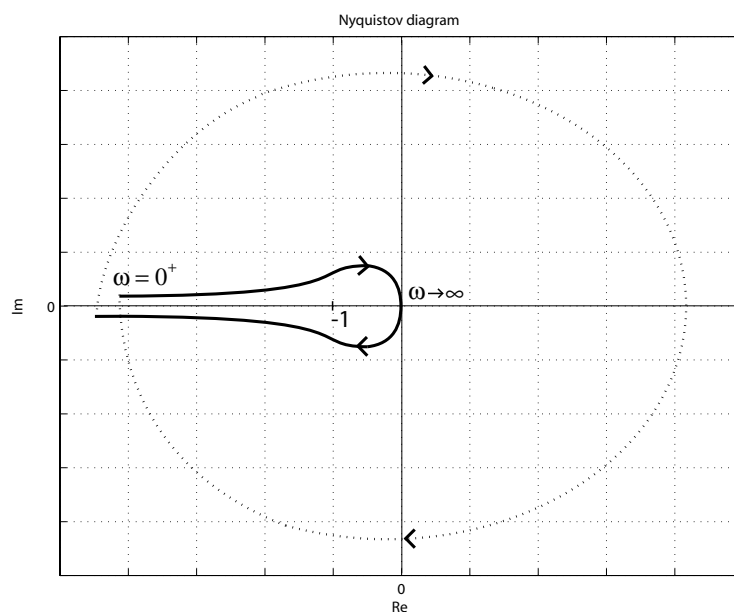
s^3	T	0
s^2	1	K
s^1	$-KT$	0
s^0	K	

Sistem je nestabilen.

(c) $P_0 = 0, N_{-1} = 2, Z_{-1} = 2 \Rightarrow$ nestabilen

Primer 2.45. Predpostavimo prenosno funkcijo odprtozančnega sistema

$$GH(s) = \frac{K(s+1)}{(s-1)(s+2)}.$$



Slika 2.71: Rešitev primera 2.44

- (a) Narišite Nyquistov diagram.
- (b) Stabilnost obravnavajte z Routhovim kriterijem.
- (c) Z Nyquistovim kriterijem obravnavajte stabilnost sistema za $K > 0$.

Rešitev:

- (a) Nyquistov diagram: slika 2.72.

$$GH(j\omega) = \frac{-2K}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)} + j \frac{K(-3\omega-\omega^3)}{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}$$

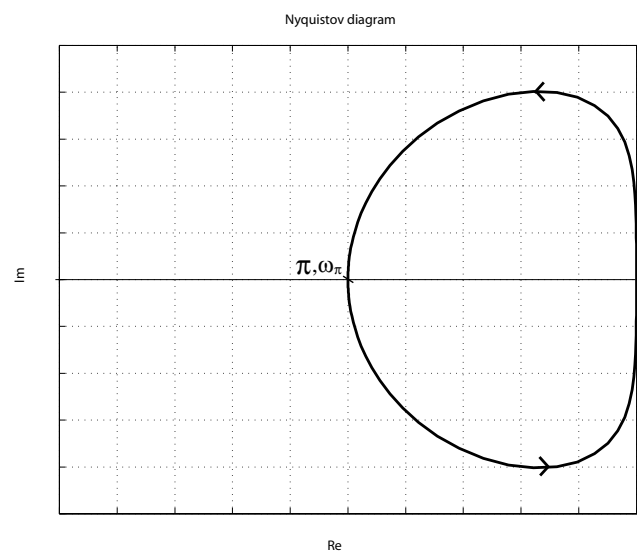
$$\text{Im}[GH(j\omega_\pi)] = 0 \Rightarrow 0$$

$$\text{Re}[GH(j\omega_\pi)] = -\frac{2K}{4}$$

- (b) $P_d = s^2 + s(K+1) + K-2$

s^2	1	$K-2$	$K > 2$
s^1	$K+1$	0	
s^0	$K-2$		

- (c) $\text{Re}[GH(j0)] = -\frac{2K}{4} < -1 \Rightarrow K > 2 \rightarrow Z_{-1} = N_1 + P_0 = -1 + 1 = 0 \Rightarrow$
stabilen



Slika 2.72: Rešitev primera 2.45

3. Kompenzacijske metode za načrtovanje regulacijskih sistemov

V naslednjem poglavju bomo predstavili osnovne kompenzacijske metode načrtovanja regulacijskih sistemov. Prikazane bodo metode načrtovanja s pomočjo diagrama lege korenov in s pomočjo Bodejevega diagrama.

3.1 Osnove kompenzacijskih metod

Določitev zahtev za delovanje regulacijskega sistema

Zahteve za delovanje regulacijskega sistema se nanašajo na določene dinamične lastnosti sistemov:

- *določeno delovanje v ustaljenem stanju* (pogrešek e_{ss} , konstante pogreškov, K_p , K_v in K_a);
- *določeno delovanje v prehodnem pojavu* (čas vzpona, umiritveni čas, maksimalni prevzpon, ζ in ω_n);
- *določena frekvenčna karakteristika* (ojačevalni in fazni razloček, resonančni vrh, pasovna širina).

Osnovne ideje kompenzacije

Osnovna ideja kompenzacije je v tem, da s pomočjo kompenzacijskega regulatorja dosežemo zahtevano frekvenčno karakteristiko, ki jo definiramo iz načrtovalskih zahtev.

Kompenzacijo v regulacijskih sistemih izvajamo z *zakasnilnimi*, *prehitevalnimi* ter z ustrezno *kombiniranimi* (zakasnilno - prehitevalnimi) kompenzatorji.

Vrste kompenzacijskih metod

Strukturno gledano lahko kompenzacijske metode razdelimo na *zaporedne* in *vzporedne* ali *povratnozančne kompenzacijske metode*. Izbira ene ali druge metode je odvisna od izvedbe sistema, od dostopnih signalov, od regulacijskih elementov, ki jih imamo na voljo in od ekonomskih faktorjev.

Glede na uporabljeno metodo v načrtovalnem postopku bomo v nadaljevanju spoznali:

- načrtovanje s pomočjo diagramov lege korenov,
- načrtovanje s pomočjo frekvenčnih (Bodejevih) diagramov.

3.1.1 Načrtovanje prehitevalnega kompenzatorja s pomočjo diagrama lege korenov

Prehitevalni kompenzator načrtujemo s pomočjo diagrama lege korenov, če so zahteve dane kot:

- koeficient dušenja,
- lastna frekvenca,
- maksimalni prevzpon,
- čas vzpona,
- umiritveni čas.

Postopek načrtovanja je naslednji:

- Iz danih zahtev določimo lego zelenih dominantnih zaprtozančnih polov.
- Narišemo DLK nekompenziranega sistema ($G(s)$). Ugotovimo, ali je možno samo s spremembo ojačenja doseči zelene pole. To je možno v primeru, če DLK že poteka skozi zahtevane pole.
- Če to ni možno, je potrebno uporabiti prehitevalni kompenzator, če poteka DLK nekompenziranega sistema desno od zelenih polov. Nato izračunamo, kakšen kot prehitevanja (kot λ) mora vnesti prehitevalni kompenzator, da točki, ki določata zelena pola, postaneta točki DLK kompenziranega sistema (da je izpolnjen kotni pogoj).

- Iz znanega kota λ določimo ničlo $s = -\frac{1}{T}$ in pol $s = -\frac{1}{\alpha T}$ prehitevalnega kompenzatorja

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- Po končanem postopku vedno preverimo, ali smo izpolnili vse zahteve.

Pri uporabi postopka moramo preveriti, ali je doseženi konjugirano kompleksni par polov dejansko dominanten, saj v nasprotnem primeru ne dosežemo zelenih ciljev.

3.1.2 Načrtovanje prehitevalnega kompenzatorja s pomočjo Bodejevega diagrama

Bodejev diagram uporabimo, kot metodo načrtovanja prehitevalnega kompenzatorja uporabljamo, če so dane naslednje zahteve:

- fazni razloček,
- ojačevalni razloček,
- pasovna širina,
- resonančni vrh,
- konstanta pogreška.

Postopek lahko opišemo v naslednjih točkah:

- kompenzator

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

zapišemo ob upoštevanju $K_K \alpha = K$ v obliko, primerno za Bodejevo analizo

$$G_K(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}.$$

Zato je odprtozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema

$$G_K(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} KG(s) = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} G_1(s),$$

pri čemer je

$$G_1(s) = KG(s).$$

- Določimo konstanto K tako, da so izpolnjene zahteve v ustaljenem stanju (konstante pogreška).
- S tako določenim K narišemo Bodejev diagram nekompenziranega sistema $G_1(s)$ in iz njega določimo fazni razložek.
- Če je fazni razložek premajhen, moramo uporabiti prehitevalni kompenzator. Določiti moramo, kakšno fazno prehitevanje Φ_{max} moramo dodati v zanko. Pri tem je potrebno upoštevati, da mora biti ta kot nekoliko večji od izračunanega, saj ustrezno definirani prehitevalni kompenzator (ki ima ojačenje 0 dB pri nizkih frekvencah) povzroči ojačenje pri visokih frekvencah, zato se ω_1 pomakne v desno, kar zmanjšuje fazni razložek.
- S pomočjo enačbe

$$\sin \Phi_{max} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

določimo razmerje med ničlo in polom α , ki omogoča fazno prehitevanje Φ_{max} . Ker ima kompenzator maksimum pri

$$\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T},$$

vnaša pri tej frekvenci ojačenje

$$\left| \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega \alpha T} \right|_{\omega = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Zato moramo ω_{max} izbrati tako, da bo pri tej frekvenci

$$20 \log |G_1(j\omega_{max})| = -20 \log \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

kar pomeni, da bo ω_{max} frekvenca, kjer bo absolutna vrednost kompenziranega sistema 0 dB.

- Iz enačbe $\omega_{max} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$ določimo pri predhodno izračunanih ω_{max} in α konstanto T in tako imamo

$$\text{ničlo pri } s = -\frac{1}{T}$$

$$\text{in pol pri } s = -\frac{1}{\alpha T}$$

- Končno določimo še ojačenje kompenzatorja

$$K_K = \frac{K}{\alpha}.$$

- Iz Bodejevega diagrama kompenziranega sistema preverimo, če so izpolnjene vse zahteve. Če niso, je potrebno postopek ponoviti.

3.1.3 Načrtovanje zakasnilnega kompenzatorja s pomočjo diagrama lege korenov

Zakasnilno kompenzacijo s pomočjo DLK lahko uporabimo v primeru, če ima regulacijski sistem že ustrezen predhodni pojav in želimo izboljšati le razmere v ustaljenem stanju.

Načrtovanje lahko opišemo v naslednjih točkah:

- narišemo DLK nekompenziranega sistema $G(s)$ in na njem določimo dominantne korene.
- Izračunamo konstanto pogreška nekompenziranega sistema $G(s)$ in jo korigiramo z zakasnilnim kompenzatorjem

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}}.$$

Odpertožančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je torej $G_K(s)G(s)$.

- Določimo lego pola in ničle kompenzatorja, tako da ustrezno povečamo konstanto pogreška (za faktor β) in pri tem minimalno spremenimo DLK. To dosežemo s polom in ničlo, ki sta blizu koordinatnega izhodišča.
- Narišemo DLK tako kompenziranega sistema. Če je fazni prispevek zakasnilnega kompenzacijskega regulatorja majhen, potem se DLK kompenziranega in nekompenziranega sistema malo razlikujeta.
- Na DLK kompenziranega sistema določimo lego zelenih korenov. To običajno določimo tako, da povežemo korene nekompenziranega sistema s koordinatnim izhodiščem. Presečišča s kompenziranim DLK so novi zeleni koreni (ohranimo ζ).
- Iz pogoja absolutne vrednosti za DLK kompenziranega sistema določimo K_K tako, da bosta dominantna pola zaprtožančnega sistema res v zeleni točki.

3.1.4 Načrtovanje zakasnilnega kompenzatorja s pomočjo Bodejevega diagrama

Osnovna zahteva pri načrtovanju zakasnilnega kompenzatorja s pomočjo Bodejevega diagramu je v tem, da z dušenjem pri srednjih in visokih frekvencah dosežemo ustrezen fazni razložek.

Postopek lahko opišemo v naslednjih točkah:

- zakasnilni kompenzator zapišemo v obliki

$$G_K(s) = K_K \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} = K_K \beta \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}, \quad \beta > 1.$$

Definiramo

$$K = K_K \beta.$$

Torej je kompenzator

$$G_K(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1}.$$

Odpertožančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je

$$G_K(s)G(s) = K \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} KG(s) = \frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} G_1(s),$$

kjer je

$$G_1(s) = KG(s).$$

- Določimo K tako, da je izpolnjen pogoj za določeno konstanto pogreška.
- Narišemo Bodejev diagram $G_1(j\omega)$.
- Če nekompenzirani sistem ne izpolnjuje zahtev za fazni in ojačevalni razložek, določimo frekvenco ω_1 , pri kateri ima odprtožančna nekompenzirana prenosna funkcija fazni kot

$$\angle[G_1(j\omega_1)] = -180^\circ + \Phi_m + (5^\circ \text{ do } 12^\circ).$$

Φ_m je želeni fazni razloček. 5° do 12° dodamo zato, ker pričakujemo, da bo zakasnilni kompenzator pri frekvenci ω_1 uvedel približno tako zakasnitev. Frekvenca ω_1 je frekvenca, pri kateri naj bi absolutna vrednost kompenziranega sistema sekala os 0 dB.

- Da fazna karakteristika zakasnilnega kompenzatorja čim manj vpliva na fazo kompenziranega sistema v bližini frekvence ω_1 , moramo pol in ničlo kompenzatorja izbrati tako, da so ustrezne lomne frekvence v dovolj nizkem frekvenčnem področju ($\frac{\omega_1}{10}$).
- Določimo, kakšno dušenje mora vnesti kompenzator, da postane absolutna vrednost kompenziranega sistema pri $\omega = \omega_1$ 0 dB. Ta vrednost je enaka

$$20 \log |G_1(j\omega)|_{\omega=\omega_1} = 20 \log \beta,$$

iz česar določimo vrednost β .

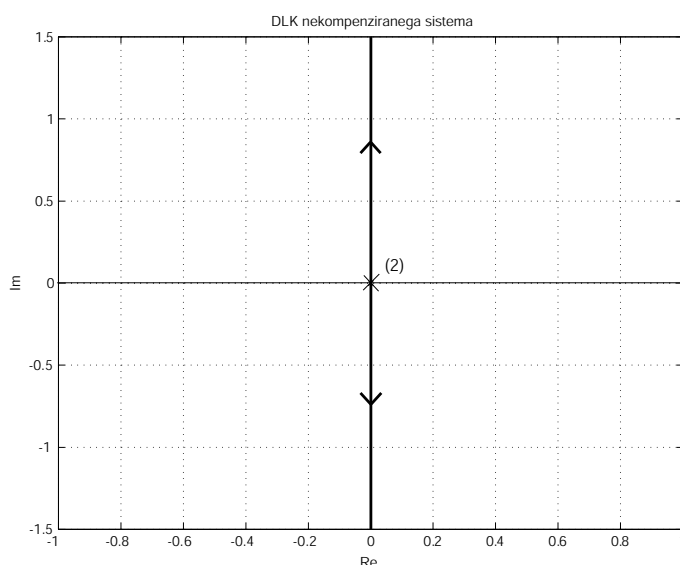
- Glede na ničlo in faktor β določimo še pol.
- Iz K in β določimo ojačenje kompenzatorja

$$K_K = \frac{K}{\beta}.$$

Primer 3.1. $\triangle$ Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo

$$GH(s) = \frac{K_0}{s^2} :$$

- narišite DLK nekompenziranega sistema;
- načrtajte ustrezni kompenzator, tako da bo umiritveni čas zaprtozančnega odziva enak $T_s \leq 4s$ (za 2% tolerančni pas) ter maksimalni prenihaj $M_p[\%] \leq 20\%$. Kompenzator načrtajte s pomočjo DLK-ja. (Ničla kompenzatorja je poljubna);
- načrtajte kompenzator s pomočjo DLK-ja, ki bo izpolnil zahteve iz naloge (b) in bo zagotavljal največjo možno vrednost $\alpha = \frac{a}{b}$ in s tem največjo konstanto pogreška;
- narišite DLK kompenziranega sistema iz naloge (c).



Slika 3.1: Rešitev primera 3.1a

Rešitev

(a) *DLK nekompenziranega sistema (slika 3.1).*

(b) *Določimo lego dominantnih polov:*

$$M_p[\%] = e^{-\zeta \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\% \Rightarrow \zeta = 0,45;$$

$$T_s = \frac{4}{\omega_n \zeta} \Rightarrow \omega_n = \frac{20}{9}$$

(če imamo 5% tolerančni pas uporabimo formulo $T_s = \frac{3}{\omega_n \zeta}$.)

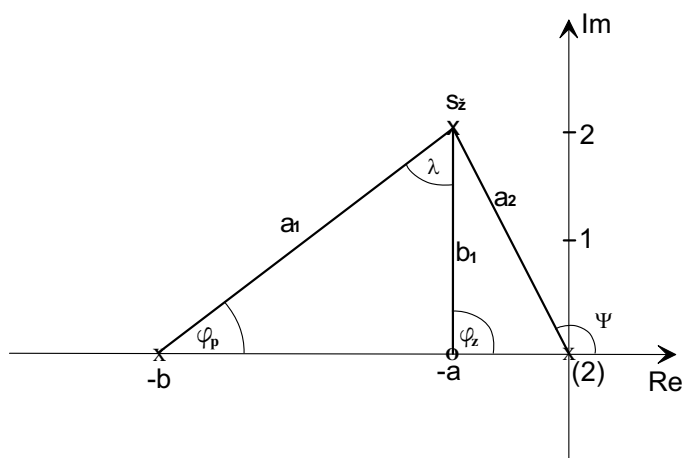
$$s_{1,2} = -\zeta \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm j2$$

Prenosna funkcija kompenzatorja je $G_k = K_k \frac{s+a}{s+b}$. Določiti je potrebno ojačenje, pol ter ničlo kompenzatorja tako, da bo kompenziran DLK potekal skozi dominantna pola. Ničlo si izberemo v točki ($a=1$).

S pomočjo slike 3.2, določimo lego pola (b).

$$\Psi = \arccos(-\zeta) = 116,5^\circ$$

$$-2\Psi + \underbrace{\varphi_z - \varphi_p}_{\lambda} = -180^\circ \Rightarrow \lambda = -180^\circ + 233^\circ = 53^\circ$$



Slika 3.2: Rešitev primera 3.1b

$$-2 \cdot 116,5^0 + 90^0 - \varphi_p = -180^0 \Rightarrow \varphi_p = 37^0$$

$$\frac{b-a}{\sin 53^0} = \frac{2}{\sin 37^0} \Rightarrow b = 3,65$$

$$K = K_k K_0 = \frac{1}{|GH(s)|} = \frac{a_1 a_2^2}{b_1} = \frac{3,32 \cdot 5}{2} = 8,3$$

Odpertozančna prenosna funkcija kompenziranega sistema je:

$$G_k G_p(s) = 8,3 \cdot \frac{s+1}{s+3,65} \cdot \frac{1}{s^2}$$

(c) V nalogi (b) smo dobili: $\Psi = 116,5^0$, $\lambda = 53^0$, $a_2 = \sqrt{5}$.

$$\gamma = \frac{\Psi - \lambda}{2} = \frac{116,5^0 - 53^0}{2} = 31,75^0$$

S pomočjo kotov λ in γ dobimo sliko 3.3, iz katere izračunamo ničlo in pol.

$$\varphi_z + \gamma + (180^0 - \Psi) = 180^0 \Rightarrow \varphi_z = 84,75^0$$

$$\frac{a_2}{\sin \varphi_z} = \frac{a}{\sin \gamma} \Rightarrow a = 1,16$$

$$\varphi_z + \varphi_p = \lambda \Rightarrow \varphi_p = 31,75^0$$

$$\frac{b}{\sin (\gamma + \lambda)} = \frac{a_2}{\sin \varphi_p} \Rightarrow b = 4,06$$

$$K = \frac{a_1 a_2^2}{b_1} = \frac{3,63 \cdot 5}{2} = 9,07$$

Primer 3.2. $\triangle$ Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{2}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)}$$

načrtajte ustrezeni prehitevalni kompenzator s pomočjo Bodejevega diagrama, tako da boste izpolnili naslednje zahteve:

- (1) konstanta hitrostnega pogoška: $K_v = 20/s$;
- (2) želeni fazni razloček: $\varphi_{m_z} = 45^0$;
- (3) pasovna širina: $\omega_1 \geq 6 \text{ rad/s}$ (ω_1 je frekvenca pri kateri amplitudni del seka 0 dB).

Rešitev

Zahteva 1: $G_1(s) = K \cdot G(s)$;

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \cdot K \cdot 2}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)} = 2K = 20/s \implies K = 10;$$

$$G_1(s) = K \cdot G(s) = \frac{20}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)}.$$

Zahteva 2: na sliki 3.5, je prikazan Bodejev diagram za $G_1(s) = \frac{20}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)}$. Vidimo, da je pri $\omega_1 = 6$ faza negativna.

$$\omega_1 = 6 \implies \varphi_m = 180^0 + \varphi(\omega_1) = 180^0 - \arctg\left(\frac{6}{0}\right) - \arctg\left(\frac{6}{2}\right) - \arctg\left(\frac{6}{6}\right) = -27^0$$

Negativni fazni razloček $\implies$ zaprtozančni sistem $G_1(s)$ je nestabilen.

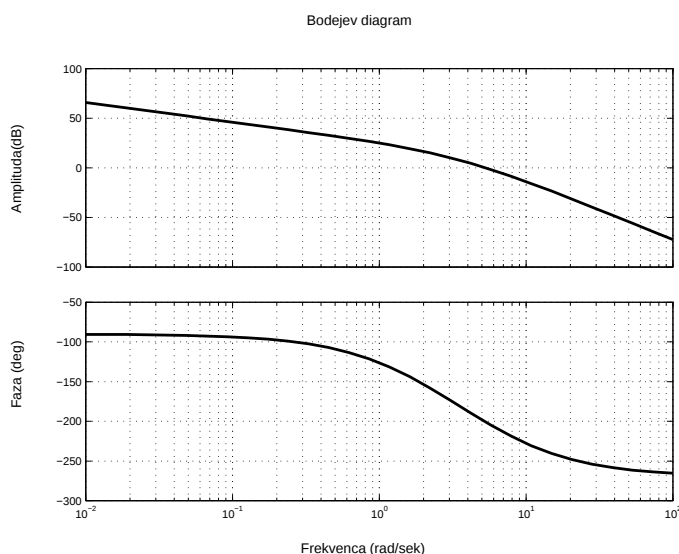
Če želimo, da bo fazni razloček $\varphi_{m_z} = 45^0$, mora kompenzator uvesti

$$\lambda_{kom} = \varphi_{m_z} - \varphi_m + \text{dodatnih } 8^0 = 80^0.$$

Ker kompenzator lahko uvede največ $\lambda_{kom \text{ max}} = 55^0$, moramo izdelati dvojni kompenzator vsak po $\lambda_{kom}^* = \frac{\lambda_{kom}}{2} = 40^0 = \varphi_{max}$. Prenosna funkcija kompenzatorja je:

$$G_k = K_k \cdot \alpha^2 \cdot \left(\frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \right)^2; \quad \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\sin(\varphi_{max}) = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \implies \alpha \approx 0,21.$$



Slika 3.5: Rešitev primera 3.2a

Zahteva 3: iz znanega α določimo ω_{max} :

$$20 \log_{10}|G(j\omega_{max})| = -2 \cdot 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \approx -13 \text{ dB}.$$

Iz Bodejevega diagrama na sliki 3.5 odčitamo, da je $\omega_{max} = 9 \text{ rad/s}$. Ničlo in pol kompenzatorja določimo iz enačb $\omega_{max} = \sqrt{ab}$ in $\alpha = \frac{a}{b}$, ojačenje pa iz $K_k = \frac{K}{\alpha^2}$. Kvadrat je zaradi tega, ker imamo dvojni kompenzator. Tako dobimo prenosno funkcijo kompenzatorja:

$$G_k(s) = 227 \left(\frac{s + 3,57}{s + 17} \right)^2.$$

Primer 3.3. $\triangle$ Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+5)(s+6)}$$

načrtajte ustrezni kompenzator tako, da bodo izpolnjene naslednje zahteve:

(1) lastna frekvenca $\omega_n = 4$;

(2) dušilni koeficient $\zeta = 0,5$;

(3) konstanta pozicijskega pogreška $K_p \geq 5$.

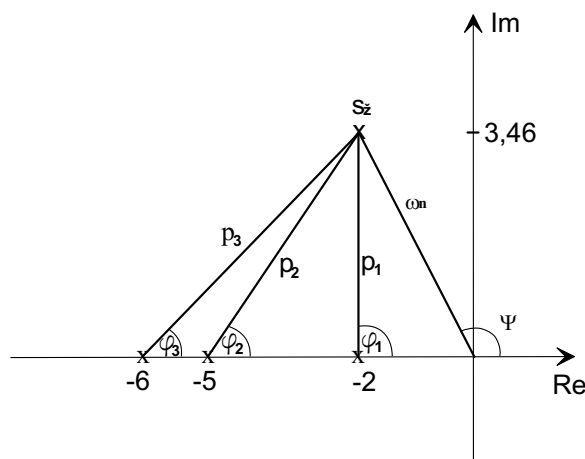
Kompenzator načrtajte s pomočjo DLK-ja.

Rešitev

Zahtevi 1,2:

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow s_{1,2} = -2 \pm j3,46$$

S pomočjo kotnega pogoja preverimo, če želena pola že ležita na DLK-ju. Iz



Slika 3.6: Rešitev primera 3.3

slike 3.6 določimo:

$$\varphi_1 = 90^0, \varphi_2 = 49^0, \varphi_3 = 41^0;$$

$$-\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3 = -180^0;$$

Kotni pogoj je izpolnjen, torej moramo spremeniti le ojačenje.

$$K = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 3,46 \cdot \sqrt{3^2 + 3,46^2} \cdot \sqrt{4^2 + 3,46^2} = 83,8$$

Zahteva 3: konstanta pozicijskega pogreška dobljenega sistema:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{83,8}{(s+2)(s+5)(s+6)} \approx 1,4. \text{ Ker je}$$

Primer 3.4. $\triangle$ Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{1}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)}$$

načrtajte ustrezni kompenzator s pomočjo Bodejevega diagrama, tako da boste izpolnili naslednje zahteve:

- (1) konstanta hitrostnega pogoška: $K_{vz} = 5/s$;
- (2) želeni fazni razloček: $\varphi_{mz} = 40^\circ$;
- (3) $\omega_1 \geq 1 \text{ rad/s}$.

Rešitev

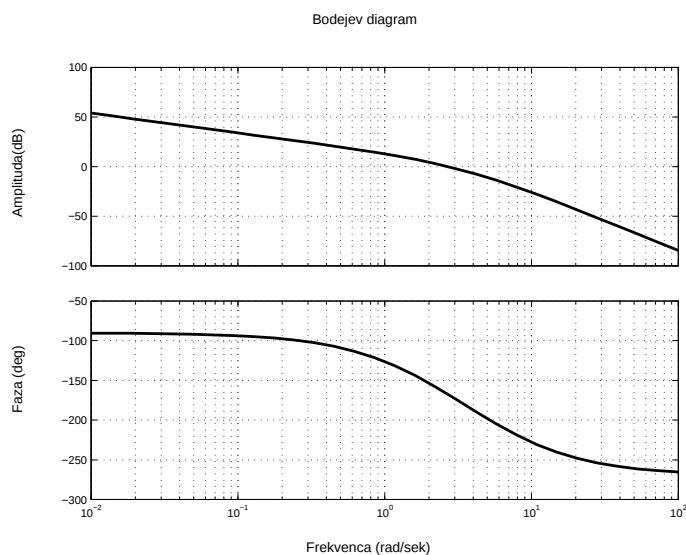
Zahteva 1: $G_1(s) = K \cdot G(s)$;

$$K_{vz} = \lim_{s \rightarrow 0} sG_1(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot K \cdot G(s) = K \implies K = 5;$$

$$G_1(s) = K \cdot G(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)}.$$

Zahteva 2: na sliki 3.8, je prikazan Bodejev diagram za $G_1(s) = \frac{5}{s(\frac{s}{2} + 1)(\frac{s}{6} + 1)}$.

$$\angle[G_1(j\omega_1)] = -180^\circ + \varphi_m + 12^\circ = -128^\circ \xrightarrow{B.} \omega_1 = \omega_1^* = 1,5 \text{ rad/sek}$$



Slika 3.8: Rešitev primera 3.4

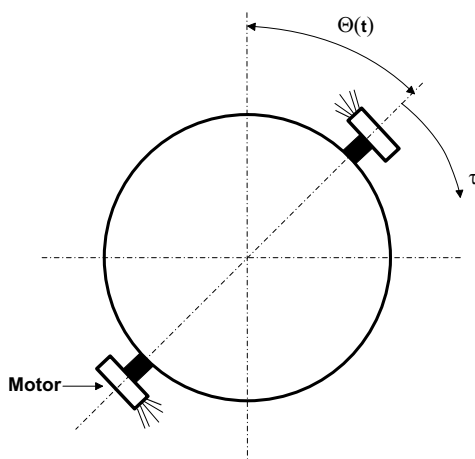
Preverimo, če smo odčitali pravilno:

$\varphi_m|_{\omega_1^*} = 90^\circ - \arctg \frac{1,5}{2} - \arctg \frac{1,5}{6} = 39^\circ$. Vrednost φ_m je premajhna torej moramo ω_1^* zmanjšati:

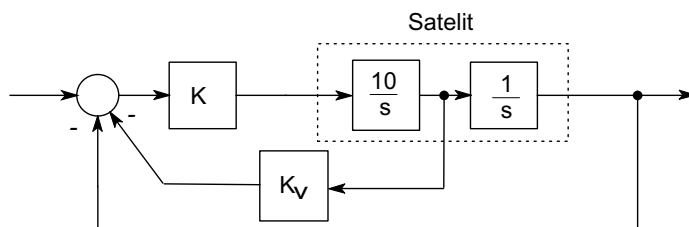
$\omega_1^* = 1,25 \rightarrow \varphi_m = 46^\circ$. Določiti moramo pole, ničlo ter ojačenje: $a = \frac{\omega_1^*}{10} = 0,125 \text{ rad/sek}$; $20 \log |G_1(j\omega_1^*)| = 12 \text{ dB} = 20 \log \beta \Rightarrow \beta = 10^{\frac{12}{20}} = 3,98$; $\beta = \frac{a}{b} \Rightarrow b = 0,031$; $K_k = \frac{K}{\beta} = 1,25$. Tako dobimo prenosno funkcijo kompenzatorja: $G_k(s) = 1,25 \cdot \frac{s+0,125}{s+0,031}$.

3.1.5 Naloge

Primer 3.5. Na sliki 3.9 je prikazan sistem za vzdrževanje pozicije satelita. Bločni diagram tega sistema je prikazan na sliki 3.10.



Slika 3.9: Satelit iz primera 3.5



Slika 3.10: Bločni diagram iz primera 3.5

- (a) Ali lahko sistem stabiliziramo, če je $K_v = 0$ in če nadomestimo ojačenje K z zakasnilnim kompenzatorjem? Utemelji odgovor.

- (b) Načrtajte prehitevalni kompenzator, ki bo zagotavljal fazni razložek $\varphi_m = 50^\circ$ pri $\omega_1 = 5 \text{ rad/s}$. Upoštevaj, da je $K_v = 0$ in ojačenje K nadomeščeno s prehitevalnim kompenzatorjem.
- (c) Ugotovite, kolikšna je napaka kompenziranega sistema v ustaljenem stanju pri stopničastem referenčnem signalu.
- (d) Določite velikost maksimalnega prevzpona M_p ter preverite rezultat dobljen pod točko (c) (uporabi simulacijo v Matlabu).

Rešitev

- (a) Če uporabimo zakasnilni kompenzator, postane sistem nestabilen (Nyquistov diagram $\rightarrow$ zaprtozančna funkcija ima nestabilen pol).
- (b) $\varphi_m = 50^\circ$
 $|G_p H(j\omega_1)| = \frac{10}{\omega_1^2} = 0,4$; $a_1 = \frac{1 - 0,4 \cos 50^\circ}{5 \sin 50^\circ} = 0,4849$; $b_1 = \frac{\cos 50^\circ - 0,4}{5 \sin 50^\circ} = 0,06339$; $G_k(s) = \frac{0,4849s+1}{0,06339s+1}$
- (c) Sistem nima napake v ustaljenem stanju (integrirni sistem).
- (d) S pomočjo simulacije ugotovimo, da sistem res nima napake v ustaljenem stanju ter da je maksimalni prevzpon $M_p = 30\%$.

```
Gknum=[0.4849 1]; Gkden=[0.06339 1];
Gpnum=[0 0 10]; Gpden=[1 0 0];
Tnum=conv(Gknum,Gpnum);
Tden=conv(Gkden,Gpden)+conv(Gkden,Gpden);
step(Tnum,Tden)
```

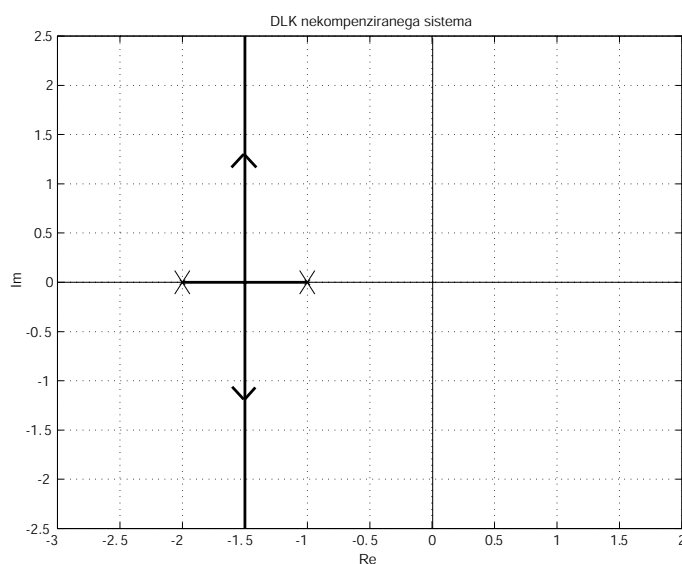
Primer 3.6. Za odprtozančni sistem s prenosno funkcijo

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} :$$

- (a) narišite DLK nekompenziranega sistema;
- (b) načrtajte ustrezeni kompenzator, tako da bo lastna frekvenca $\omega_n = \sqrt{10}$, dušilni koeficient $\zeta = \frac{3}{\sqrt{10}}$ ter faktor α maksimalen. Kompenzator načrtajte s pomočjo DLK-ja;
- (c) narišite DLK kompenziranega sistema.

Rešitev

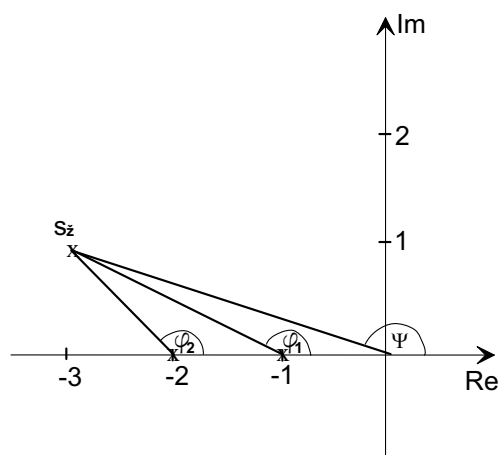
(a) DLK nekompenziranega sistema: slika 3.11



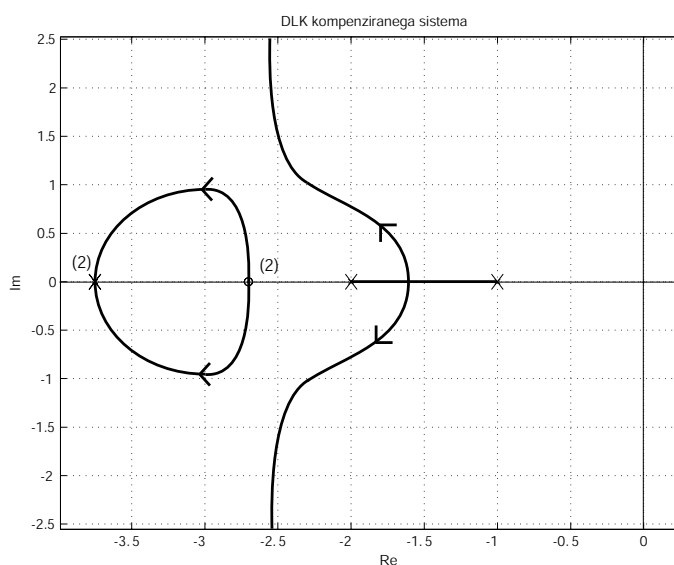
Slika 3.11: Rešitev primera 3.6a

(b) Določimo lego dominantnih polov (slika 3.12).

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \implies s_{1,2} = -3 \pm j$$



Slika 3.12: Rešitev primera 3.6b



Slika 3.14: Rešitev primera 3.6c

- (a) Narišite DLK nekompenziranega sistema.
- (b) Načrtajte ustrezni kompenzator tako, da bodo izpolnjene naslednje zahteve:
- (1) dušilni koeficient $\zeta = 0,6$;
 - (2) dominantna časovna konstanta $T_d = 0,75$ s ;
 - (3) konstanta hitrostnega pogreška $K_{vz} = 20/s$.
- (c) Narišite DLK kompenziranega sistema.

Kompenzator načrtajte s pomočjo DLK-ja.

Rešitev

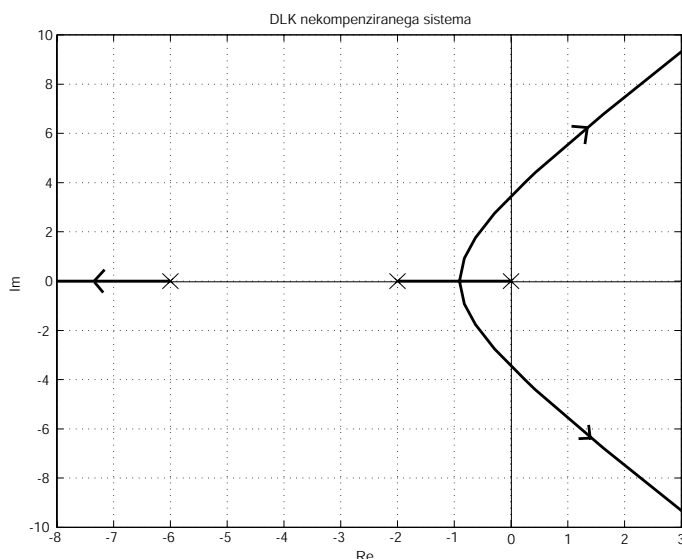
- (a) DLK nekompenziranega sistema: slika 3.15
- (b) Načrtovanje kompenzatorja.

Zahtevi 1 in 2: $T_d = \frac{1}{\omega_n \zeta} \implies \omega_n = 2,2 \text{ rad/sek}$

$$s_{1,2} = -1,32 \pm j1,76$$

Iz slike 3.15 vidimo, da želeni poli ne ležijo na DLK-ju, zato potrebujemo prehitevalni kompenzator.

$$G_{pr}(s) = K_{pr} \cdot \frac{s+a_{pr}}{s+b_{pr}}$$



Slika 3.15: Rešitev primera 3.7a

$$\lambda = 36^0; \quad \gamma = 44,5^0; \quad \varphi_z = 82,5^0; \quad \varphi_p = 46,5^0$$

$$\frac{\omega_n}{\sin \varphi_z} = \frac{a}{\sin \gamma} \implies a_{pr} = 1,55$$

$$\frac{\omega_n}{\sin \varphi_p} = \frac{b}{\sin (\gamma + \lambda)} \implies b_{pr} = 3,02$$

$$K_{pr} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_{k-pr}}{p_{z-pr}} = \frac{5 \cdot 1,89 \cdot 2,2 \cdot 2,45}{1,77} = 28,77$$

Prenosna funkcija prehitevalnega kompenzatorja je:

$$G_{pr} = 28,77 \cdot \frac{s + 1,55}{s + 3,02}.$$

Zahteva 3: najprej preverimo vrednost K_v :

$$G_1(s) = G \cdot G_{pr}(s) \quad K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot G_1(s) = 1,23$$

Konstanta hitrostnega pogreška je premajhna, zato potrebujemo zakasnilni kompenzator.

$$G_{zk}(s) = K_{zk} \cdot \frac{s + a_{zk}}{s + b_{zk}}$$

$$K_{vz} = \beta \cdot K_v \implies \beta = 16,26$$

$$\gamma_z = 5^0; \quad \Psi = 127^0; \quad \varphi_z = 122^0$$

$$\frac{a_{za}}{\sin \gamma_z} = \frac{\omega_n}{\sin \varphi_z} \implies a_{za} = 0,22$$

$$b_{za} = \frac{a_{za}}{\beta} = 0,0135$$

$$K_{za} = \frac{p_{k-za}}{p_{z-za}} = \frac{2,2}{2,07} = 1,06$$

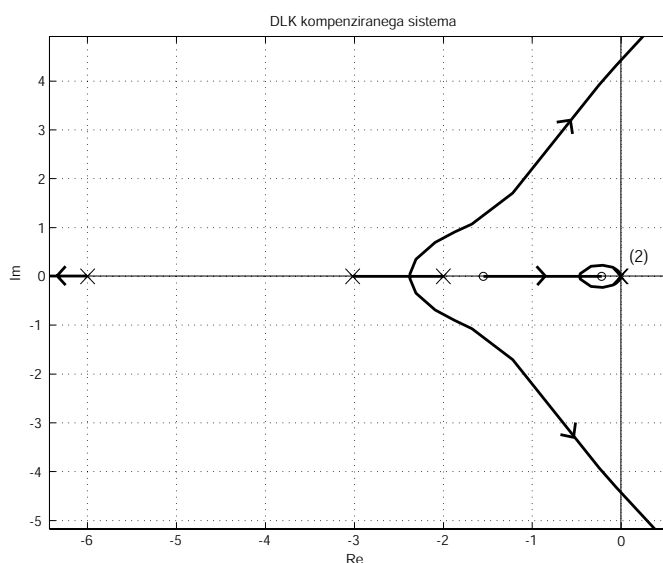
Prenosna funkcija zakasnilnega kompenzatorja je:

$$G_{za} = 1,06 \cdot \frac{s + 0,22}{s + 0,0135}.$$

Prenosna funkcija kompenziranega sistema je tako:

$$G_k = 28,77 \cdot \frac{s + 1,55}{s + 3,02} \cdot 1,06 \cdot \frac{s + 0,22}{s + 0,0135} \cdot \frac{1}{s(s + 2)(s + 6)}.$$

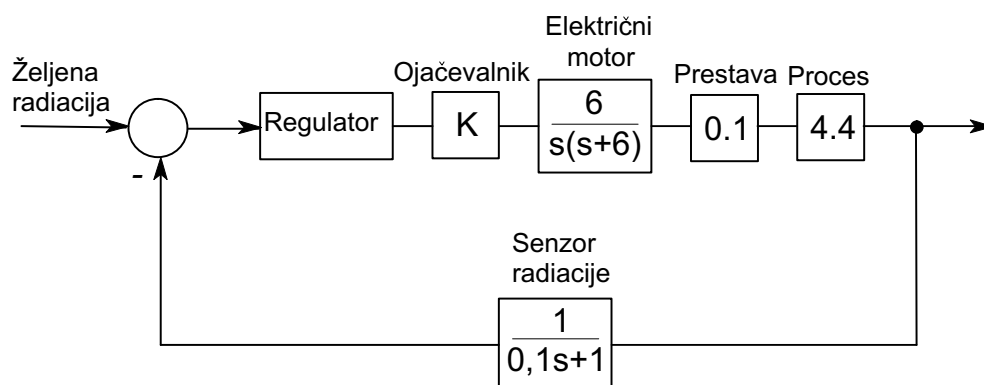
(c) DLK kompenziranega sistema: slika 3.16



Slika 3.16: Rešitev primera 3.7c

Primer 3.8. Na sliki 3.17 je prikazan bločni diagram sistema za vodenje kontrolnih palic v jedrskem reaktorju.

- Poiščite fazni razložek ter ojačevalni razložek nekompenziranega sistema, če ima ojačevalnik ojačenje $K = 1$.
- Predpostavimo, da potrebujemo za ustaljeno stanje potrebujemo ojačevalnik z ojačenjem $K=20$. Načrtajte zakasnilni kompenzator z enotnim ojačenjem, ki bo zagotavljal fazni razložek $\varphi_m = 50^\circ$.
- Določite velikost maksimalnega prevzpona M_p (uporabi simulacijo v Matlabu).



Slika 3.17: Bločni diagram iz primera 3.8

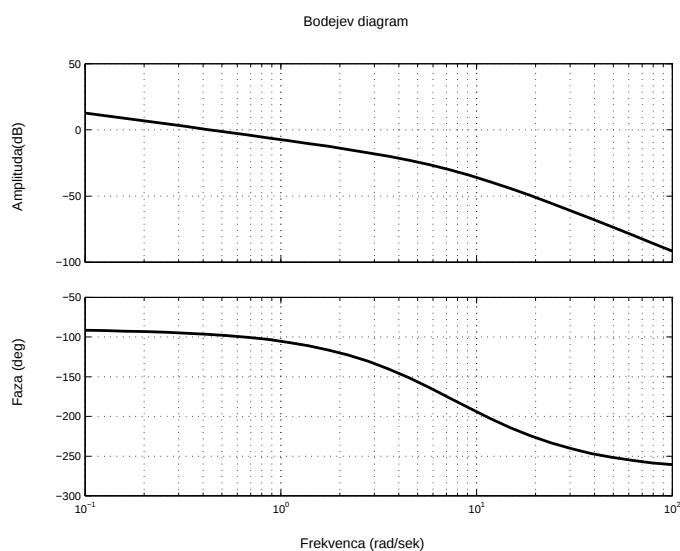
Rešitev

(a) $\omega_m = 7,9 \text{ rad}$ (ω_m je frekvenca, pri kateri faza seka -180^0)

$$|G(j\omega_m)| = 0,026; \angle[G(j\omega_m)] = -180^0$$

$$K_m = \frac{1}{|G(j\omega_m)|} = 38,5 = 31,7 \text{ dB}$$

(b) Zakasnilni kompenzator načrtamo s pomočjo Bodejevega diagrama na sliki 3.18. $-180^0 + \varphi_m + 5^0 = -125^0 \Rightarrow \omega_1 = 2,4$



Slika 3.18: Primer 3.8b

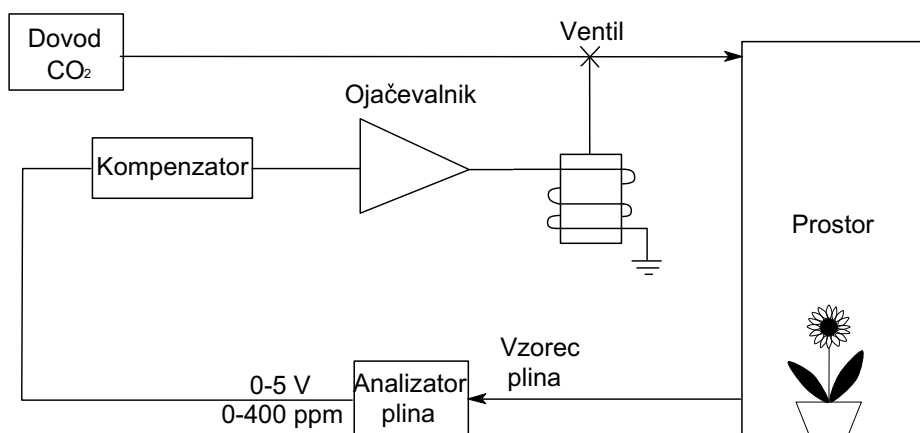
$$\begin{aligned}\beta &= |KG(j\omega_1)| = 20 \cdot 0,17 = 3,4 \\ a &= \frac{2,4}{10} = 0,24 \\ b &= \frac{a}{\beta} = \frac{0,24}{3,4} = 0,07059 \\ K_k &= \frac{1}{\beta} = 0,294 \\ G_k(s) &= 0,294 \cdot \frac{s+0,24}{s+0,07059}\end{aligned}$$

$$(c) \quad M_p = 20\%$$

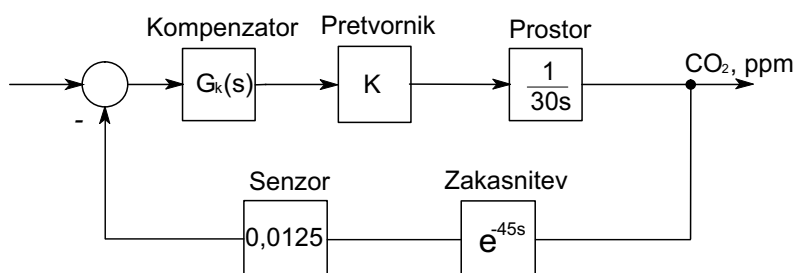
```
Gknum=[0.294 0.07059]; Gkden=[1 0.07059];
Gpnum=[0 0 0 528]; Gpden=[1 16 60 0];
Tnum=conv(Gknum,Gpnum);
Tden=conv(Gkden,Gpden)+conv(Gkden,Gpden);
step(Tnum,Tden)
```

Primer 3.9. Na sliki 3.19 je prikazan zaprtozančni sistem za uravnavanje količine ogljikovega dioksida (CO_2) v prostoru, kjer rastejo rastline. Takšen sistem uporabljamo pri raziskavah o učinku CO_2 na rast rastlin. Senzor, ki je uporabljen v sistemu, potrebuje določen čas za analizo plina, zato je v bločnem diagramu prikazan kot ojačenje z idealno zakasnitvijo 45 sekund.

- Vhod v sistem je dotok ogljikovega dioksida (CO_2) v kubičnih centimetrih na sekundo (cm^3/s), izhod pa je količina CO_2 v prostoru v cm^3 . Dokazite, da ima sistem integrirni značaj, tako da opazujete izhod, ko je na vhodu enotina stopnica.
- Naj bo $G_k(s) = 1$. Določite frekvenco (ω), pri kateri je faza odprtozančne funkcije enaka -180° .
- Za primer (b) določite takšno ojačenje K , ki bo zagotavljalo fazni razloček $\varphi_m = 45^\circ$.
- Načrtajte zakasnilni kompenzator z enotnim ojačenjem, ki bo zagotavljal fazni razloček $\varphi_m = 45^\circ$, pri čemer je $K = 60$.
- Določite napako v ustaljenem stanju pri odzivu na enotino stopnico za primer (d).
- Dokazite, da za odprtozančni sistem iz primera (d) pri mejni frekvenci velja: $|GH(j\omega_1)| = 1$ in $\angle[GH(j\omega_1)] = -135^\circ$.



(a)



(b)

Slika 3.19: Funkcijski in bločni diagram iz primera 3.9

Rešitev

- (a) *Vhod:* $n(t) = u(t) \text{ cm}^3/\text{s} \Rightarrow N(s) = \frac{1}{s}$.
Izhod: $c(t) = A \cdot t \cdot u(t) \text{ cm}^3 \Rightarrow C(s) = \frac{A}{s^2}$ (količina CO_2 – ja v sobi je konstantna).

$$G_p(s) = \frac{A/s^2}{1/s} = \frac{A}{s}$$

- (b) $KG_pH(s) = \frac{4,167 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-45s} \cdot K}{s}$; $e^{-j\omega 45} \Rightarrow \angle[KG_pH(s)] = -45\omega$
 $\angle[KG_pH(s)] = -90 - (45\omega)^0 = 180^0$
 $45\omega = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{90} = 0,0349 \text{ rad/s}$

- (c) $\angle[KG_pH(j\omega)] = -90^0 - (45\omega)^0 = -180^0 + 45^0 = -135^0$
 $45\omega_1 = (45^0) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \omega_1 = 0,01745 \text{ rad/s}$

$$|KG_p H(j \cdot 0,01745)| = \frac{4,167 \cdot 10^{-4}}{0,01745} K = 1 \implies K = 41,88$$

(d) Iz primera (c) vemo, da je $\omega_1 = 0,01745 \text{ rad/s}$. $|KG_p H(j0,01745)| = 60 \cdot \frac{4,167 \cdot 10^{-4}}{0,01745} = 1,4328$

Če želimo kompenzator z enotnim ojačenjem moramo ojačenje zmanjšati za $\frac{1}{1,4328} \Rightarrow K_k = 0,6980$.

$$a = \frac{\omega_1}{10} = 0,001745 \quad ; \quad b = \frac{0,001745}{1,4328} = 0,001218 \quad G_k(s) = 0,6980 \cdot \frac{s+0,001745}{s+0,001218}$$

(e) Sistem je 1. vrste (integrator), zato v nobenem primeru ni napake v ustaljenem stanju.

$$(f) \text{ Primer (d): } G_k(j0,01745) = \frac{0,6980 \cdot (j0,01745) + 0,001218}{j0,01745 + 0,001218};$$

$$KG_p H(j0,01745) = \frac{4,166 \cdot 10^{-4} \cdot 60 \cdot e^{-45j \cdot 0,01745}}{j0,01745};$$

$$|G_k KG_p H(j \ 0,01745)| = 1; \quad \angle[G_k KG_p H(j \ 0,01745)] = 136,7^\circ.$$

Primer 3.10. Upoštevajte sistem iz prejšnje naloge, prikazan na sliki 3.19.

(a) Načrtajte PI-kompenzator, ki bo zagotavljal fazni razloček približno $\varphi_m \approx 45^\circ$ pri $K = 60$ in $\omega_1 = 0,016 \text{ rad/s}$.

(b) Načrtajte PD-kompenzator, ki bo zagotavljal fazni razloček $\varphi_m = 45^\circ$ pri $K = 60$ in $\omega_1 = 0,03 \text{ rad/s}$.

(c) Dokažite, da za odprtozančni sistem iz primerov (a) in (b) pri mejni frekvenci velja $|GH(j\omega_1)| = 1$ in $\angle[GH(j\omega_1)] = -135^\circ$.

Rešitev

(a) $\omega_1 = 0,016 \text{ rad/s}$

$$|KG_p H(j\omega_1)| = 1,563 \quad ; \quad \angle[KG_p H(j\omega_1)] = -131,3^\circ$$

$$\varphi = -180^\circ + 45^\circ + 131,3^\circ = -3,70^\circ$$

$$K_P = \frac{\cos(-3,70^\circ)}{1,563} = 0,638 \quad ; \quad K_I = \frac{-0,016 \cdot \sin(-3,70^\circ)}{1,563} = 0,000661$$

$$G_k(s) = 0,638 + \frac{0,000661}{s}$$

(b) $\omega_1 = 0,03 \text{ rad/s}$

$$|KG_p H(j\omega_1)| = 0,8334 \quad ; \quad \angle[KG_p H(j\omega_1)] = -167,4^\circ$$

$$\varphi = -180^\circ + 45^\circ + 167,4^\circ = 32,4^\circ$$

$$K_P = \frac{\cos(32,4^\circ)}{0,8334} = 1,013 \quad ; \quad K_D = \frac{\sin(32,4^\circ)}{0,03 \cdot 0,8334} = 21,43$$

$$G_k(s) = 1,013 + s \cdot 21,43$$

(c) **Primer (a):** $|G_k(j\omega_1) \cdot KG_p H(j\omega_1)| = 1,563 \cdot 0,6373 = 1;$
 $\angle[G_k(j\omega_1) \cdot KG_p H(j\omega_1)] = -3,12^\circ - 131,3^\circ = -134,4^\circ.$

Primer (b): $|G_k(j\omega_1) \cdot KG_p H(j\omega_1)| = 0,8334 \cdot 1,200 = 1;$
 $\angle[G_k(j\omega_1) \cdot KG_p H(j\omega_1)] = 32,4^\circ - 167,4^\circ = -135^\circ.$

Primer 3.11. Bločni diagram za toplotni regulacijski sistem je prikazan na sliki 3.20. Če v nalogi ni drugače navedeno je signal motnje $d(t)$ enak nič (vrata sobe so zaprta).

- (a) Določite potrebno vhodno napetost, da bo v sobi $50^\circ C$.
- (b) Določite napako v ustaljenem stanju pri referenčni vhodni napetosti, ki vsiljuje v sobi temperaturo $50^\circ C$, in $G_k(s) = 1$.
- (c) Nadomestite kompenzator z ojačenjem ($G_k(s) = K$). Kolikšno mora biti ojačenje K , da bo v ustaljenem stanju maksimalna napaka $1^\circ C$, ko je na vходу referenčna napetost, ki v sobi vsiljuje temperaturo $50^\circ C$.
- (d) Določite ojačevalni razloček, fazni razloček ter časovno konstanto sistema dobljenega v primeru (c).
- (e) Časovna konstanta odprtozančnega sistema je $\tau = 10s$. Ali je časovna konstanta dobljena v primeru (d) primerna za realen sistem? Upoštevajte, da zahteva časovna konstanta zelo veliko ojačenje v odprtozančnem sistemu. To pomeni, da mora sistem v zelo kratkem času dovesti v prostor zelo veliko količino toplotne energije.

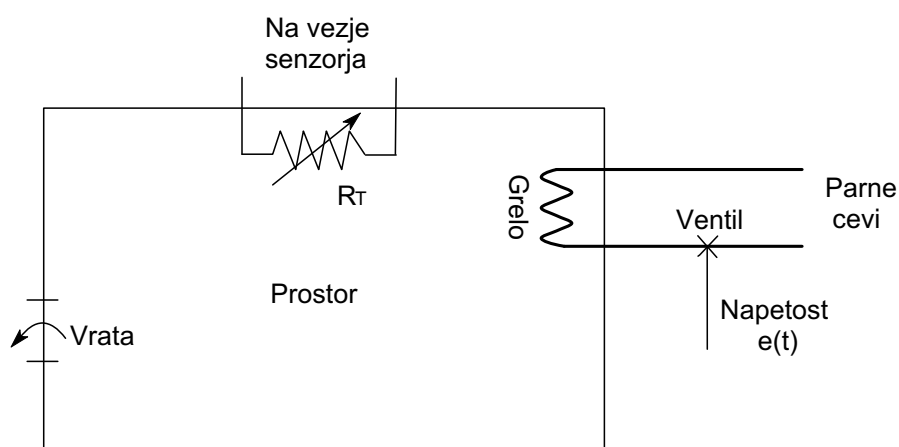
Rešitev

(a) $H = 1 \Rightarrow r(t) = 50V$

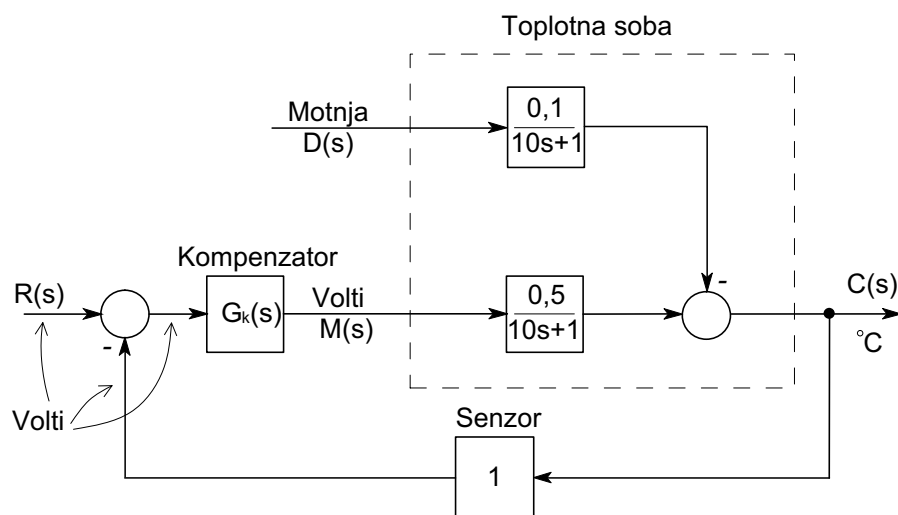
(b) $G_p(0) = K_p = 0,5 \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{1,5} = 0,667 \Rightarrow 66,7\%$

(c) $KG_p(0) = K_p = 0,5K$

$$\frac{50}{1+K_p} = 1 \Rightarrow K_p = 49 = 0,5K \Rightarrow K = 98$$



(a)



(b)

Slika 3.20: Funkcijski in bločni diagram iz primera 3.11

(d) Odprtozančna funkcija: $KG_p(0) = \frac{4,9}{s+0,1}$.

Zaprtozančna funkcija: $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4,9}{s+5} \Rightarrow \tau = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ s}$.

Ojačevalni razloček: $K_m = \infty$.

Fazni razloček: $\left| \frac{4,9}{0,1+j\omega_1} \right| \Rightarrow \omega_1 = 4,9 \text{ rad/s}; \angle[KG_p(j\omega_1)] = -90^\circ \Rightarrow \varphi_m = 90^\circ$.

(e) $\tau_{oz} = 10\text{s}; 4\tau = 40\text{s}$

$$\tau_{zz} = 0,2s; 4\tau = 0,8s$$

Dobljeni sistem ima premajhno časovno konstanto za ogrevanje velike sobe.

Primer 3.12. Upoštevajte regulacijski shemo temperaturnega procesa, ki je prikazan na sliki 3.20. Zahtevani pogrešek v ustaljenem stanju je v tolerančnem pasu $e_{ss} \leq 1\%$.

- Določite vrste kompenzatorjev, ki so primerne za izpolnitev zahteve.
- Načrtajte PI-kompenzator tako, da bo napaka v ustaljenem stanju 1% ali manj. Sistem mora pri frekvenci $\omega_1 = 0,1 \text{ rad/s}$ imeti fazni razložek $\varphi_m = 89^\circ$.
- Preverite, če za kompenzirani odprtozančni sistem iz primera (b) pri frekvenci $\omega_1 = 0,1 \text{ rad/s}$ velja: $|G_k G_p(j\omega_1)| = 1$ in $\angle[G_k G_p(j\omega_1)] = -91^\circ$.
- Določite časovno konstanto, dušilni koeficient ter umiritveni čas zaprtozančnega sistema.
- Simulirajte kompenzirani sistem pri stopničastem vhodnem signalu 50V ter s tem preverite rezultate dobljene v primeru (d).

Rešitev

- Primerna kompenzatorja sta PI in PID.
- $|G_p(j0.1)| = 0.3536$; $\angle[G_p(j0.1)] = -45^\circ$
 $\varphi = -180^\circ + 89^\circ + 45^\circ = -46^\circ$
 $K_P = \frac{\cos(-46^\circ)}{0.3536} = 1,965$; $K_I = \frac{-0.1 \cdot \sin(-46^\circ)}{0.3536} = 0,2034$
 $G_k(s) = 1,965 + \frac{0,2034}{s}$
- $|G_k(j\omega_1) \cdot G_p H(j\omega_1)| = 2,829 \cdot 0,3536 = 1$
 $\angle[G_k(j\omega_1) \cdot G_p H(j\omega_1)] = -46^\circ - 45^\circ = -91^\circ$
- $1 + G_c G_p H(s) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{0,05(1,965s+0,2035)}{s+(s+0,1)}$
 $s^2 + 0,1983s + 0,01018 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = 0,0992 \pm 0,0187$
Časovna konstanta: $\tau_{1,2} = \frac{1}{0,0992} = 10,10s$.
Umiritveni čas: $T_s = 4\tau = 40,4s$.
Dušilni koeficient: $\omega_n = \sqrt{0,01018}$; $2\zeta\omega_n = 0,1983 \Rightarrow \zeta = 0,982$.

(e) Ni prevzpona, $T_s \approx 40s$.

```
Gknum=[1.965 0.2035]; Gkden=[1 0];
Gpnum=[0 0.5]; Gpden=[10 1];
Tnum=conv(Gknum,Gpnum);
Tden=conv(Gkden,Gpden)+conv(Gkden,Gpden);
step(Tnum,Tden)
```

Primer 3.13. Imamo kompenzator s prenosno funkcijo: $G_k(s) = K_d \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_0}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$.

(a) Dokazite, da je K_d enosmerno ojačenje kompenzatorja.

(b) Dokazite, da če je na vhodu kompenzatorja enotina stopnica, je na izhodu stopnica, ki je enaka: $\frac{K_d \omega_p}{\omega_0}$.

Rešitev

(a) Enosmerno ojačenje: $K_{dc} = \lim_{s \rightarrow \infty} G_k(s) = K_d$.

$$(b) \quad G_k(s) = \frac{K_{dc} \omega_p}{\omega_0} \cdot \frac{s + \omega_0}{s + \omega_p} \quad M(s) = \frac{K_{dc} \omega_p}{\omega_0} \cdot \frac{s + \omega_0}{s(s + \omega_p)} = \frac{K_{dc} \omega_p}{\omega_0} \left[\frac{\frac{\omega_0}{\omega_p}}{s} + \frac{\frac{(\omega_0 + \omega_p)}{\omega_p}}{s + \omega_p} \right] m(t) =$$

$$\frac{K_{dc} \omega_p}{\omega_0} \left[\frac{\omega_0}{\omega_p} + \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_p} \cdot e^{-\omega_p t} \right] m(0) = \frac{K_{dc} \omega_p}{\omega_0} \left[\frac{\omega_0}{\omega_p} + \frac{\omega_p - \omega_0}{\omega_p} \right] = \frac{K_{dc} \omega_p}{\omega_0}$$

Primer 3.14. Za dano kompenzatorjevo prenosno funkcijo ugotovite, ali pripada prehitevalnemu ali zakasnilnemu kompenzatorju, ter podajte vsaj dva dokaza za vašo trditev.

$$(a) \quad G_c(s) = \frac{1,9s + 1,8}{s + 0,5}$$

$$(b) \quad G_c(s) = \frac{0,9s + 1,7}{s + 1,5}$$

Rešitev

(a) (1) $G_c = \frac{1,9(s+0,9474)}{s+0,5}$; $|\omega_p| < |\omega_o| \Rightarrow$ zakasnilni kompenzator.

(2) Ojačenje pri nizkih frekvencah (enosmerno ojačenje)($s = 0$): $\frac{1,8}{0,5} = 3,6$

Ojačenje pri visokih frekvencah ($s = \infty$): 1,9

Kompenzator močnejše ojačuje nizke frekvence $\Rightarrow$ zakasnilni kompenzator

(b) (1) $G_c = \frac{0,9(s+1,889)}{s+1,5}$; $|\omega_p| < |\omega_o| \Rightarrow$ zakasnilni kompenzator.

(2) Ojačenje pri nizkih frekvencah (enosmerno ojačenje)($s = 0$): $\frac{1,7}{1,5} = 1,1$

Ojačenje pri visokih frekvencah ($s = \infty$): 0,9

Kompenzator bolj ojačuje pri nizkih frekvencah $\Rightarrow$ zakasnilni kompenzator

Primer 3.15. Ugotovite lastnosti kompenzatorjev.

(a) Kakšne so zahteve za parameter a , da bo dana kompenzatorjeva prenosna funkcija predstavljala prehitevalni kompenzator.

$$G_c(s) = \frac{as + b}{s + b}$$

(b) Ponovite vajo (a) za parameter b v spodaj navedeni kompenzatorjevi prenosni funkciji.

$$G_c(s) = \frac{as + b}{as + 1}$$

Rešitev

(a) Ojačenje pri nizkih frekvencah ($s = 0$): 1.

Ojačenje pri visokih frekvencah ($s = \infty$): a .

Pogoj za prehitevalni kompenzator: $a > 1$.

(b) Ojačenje pri nizkih frekvencah ($s = 0$): 1.

Ojačenje pri visokih frekvencah ($s = \infty$): b .

Pogoj za prehitevalni kompenzator: $b < 1$.

Primer 3.16. Za enojni kompenzator $G_k(s) = \frac{s+\omega_0}{s+\omega_p}$ dokažite, da velja $\omega_m = \sqrt{\omega_p\omega_0}$, kjer je ω_m frekvenca, pri kateri faza doseže ekstrem (prevoj).

Rešitev

$$\varphi = \arctan \frac{\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega}{\omega_p}}{1 + \frac{\omega^2}{\omega_0 \omega_p}}; \quad \frac{d\varphi}{d\omega} = 0 \implies 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0 \omega_p} = 0; \quad \omega^2 = \omega_0 \omega_p \implies \omega = \sqrt{\omega_0 \omega_p}$$

Primer 3.17. Dano imamo odprtozančno prenosno funkcijo

$$G_p(s)H(s) = \frac{4}{s(s+1)(s+2)}$$

ter PD-kompenzator

$$G_k(s) = 1,10 + 1,12s,$$

ki zagotavlja fazni razložek 50° . Poiščite prehitevalni kompenzator, ki ima obliko

$$G_{kPRE} = \frac{a_1 s + a_0}{b_1 s + 1}$$

in ima enako nizkofrekvenčno ojačenje ter ničlo, kot dani PD-kompenzator. Prehitevalni kompenzator naj zagotavlja fazni razložek $\varphi = 47^\circ$.

Rešitev

$$PD: \quad G_k(s) = 1,10 + 1,12s = 1,12(s + 0,982).$$

Nizkofrekvenčno ojačenje: $a_0 = 1,10$.

Ničla: $\frac{a_0}{a_1} = 0,982 \implies a_1 = 1,12$.

$$G_{kPRE} = \frac{1,12s + 1,10}{b_1 s + 1}$$

Iz Bodejevega diagrama sistema s PD-kompenzatorjem ugotovimo, da je pri faznem razločku 50° frekvenca $\omega = 1,7 \text{ rad/s}$.

$$\angle[G_{kPRE}(j1,7)G_pH(j1,7)] = -130^\circ - \angle[1 + j1,7b_1]$$

Če želimo fazni razložek 47° , mora kompenzator prispevati: $-130^\circ - 47^\circ - \angle[1 + j1,7b_1] = -180^\circ \implies \angle[1 + j1,7b_1] = 3^\circ$; $\tan 3^\circ = \frac{1,7b_1}{1} \implies b_1 = 0,0308$;
 $G_{kPRE} = \frac{1,12s+1,10}{0,0308s+1}$

4. Analiza in sinteza sistemov v prostoru stanj

Metode analize in sinteze v prostoru stanj so t.i. moderne metode. Temeljijo na zapisu sistema v prostoru stanj, ki omogoča obravnavo tako univariabilnih kot tudi multivariabilnih sistemov. V nadaljevanju bo predstavljena metoda premikanja polov (*pole-placement*) pri načrtovanju regulatorja in observatorja stanj. Ker obravnavamo linearne, časovno nespremenljive sisteme, lahko model procesa zapišemo v prostoru stanj kot

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t).$$

4.1 Načrtovanje regulatorja stanj

Moderni postopki vodenja določajo zapis regulirnega zakona v obliki funkcije stanj procesa

$$u(t) = f[\mathbf{x}(t)].$$

Ko govorimo o premikanju polov, definiramo regulirni zakon kot linearno funkcijo stanj:

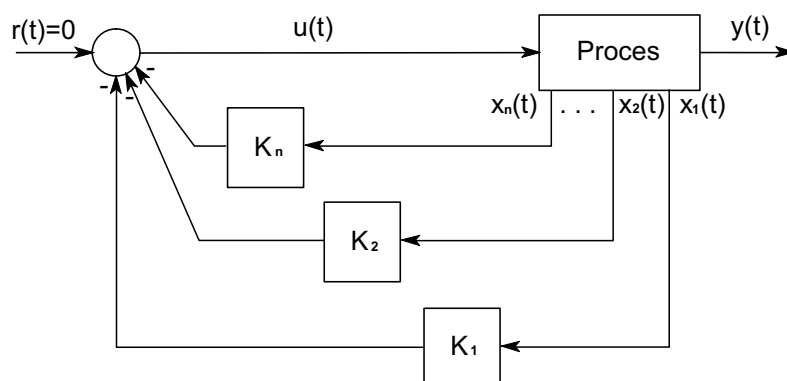
$$u(t) = \mathbf{K}\mathbf{x}(t),$$

$$u(t) = -K_1x_1(t) - K_2x_2(t) - \cdots - K_nx_n(t).$$

Princip premikanja polov omogoča poljubno premikanje vseh zaprtozančnih polov v željene vrednosti. Primer regulacijske sheme z regulatorjem stanj je prikazan na sliki 4.1.

V nadaljevanju bo prikazana metoda premikanja polov na primeru procesa, ki je prikazan na sliki 4.2.

Primer 4.1. $\triangle$ V tem primeru poskušamo načrtati regulacijo za kot odmika satelita. Zapis modela procesa v prostoru stanj je

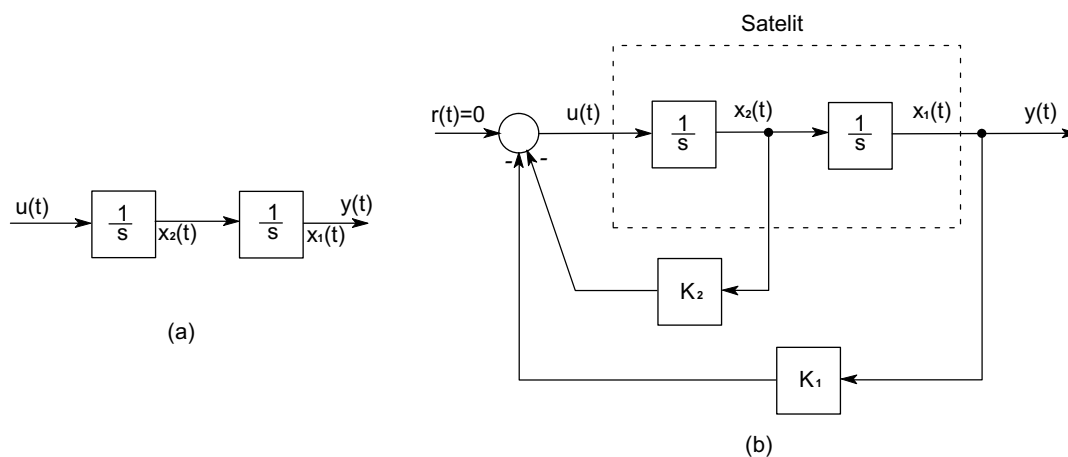


Slika 4.1: Regulator stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t).$$

Regulirni zakon v obliki regulatorja stanj je dan z enačbo

$$u(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) = [-K_1 \ -K_2] \mathbf{x}(t) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(t).$$



Slika 4.2: Regulacijska shema satelita

Z upoštevanjem regulirnega zakona dobimo zapis zaprtozančnega sistema

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} u(t)|_{u=-\mathbf{K} \mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) - \mathbf{B} \mathbf{K} \mathbf{x}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [K_1 K_2] \mathbf{x}(t) \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_1 & K_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)
\end{aligned}$$

Stanja zaprtozančnega sistema lahko predstavimo z matrično diferencialno enačbo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -K_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}(t),$$

kjer je $\mathbf{A}_f$ sistemska matrika zaprtozančnega sistema. Karakteristično enačbo zaprtozančnega sistema dobimo kot

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ K_1 & s + K_2 \end{vmatrix} = s^2 + K_2 s + K_1 = 0.$$

Predpostavimo, da smo izbrali željena zaprtozančna pola pri vrednostih $-\lambda_1$ in $-\lambda_2$. Željeni zaprtozančni karakteristični polinom lahko zato zapišemo kot

$$\alpha_c(s) = (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1 \lambda_2 = 0.$$

Načrtovanje rezultira v izbiri parametrov K_1 in K_2 :

$$K_1 = \lambda_1 \lambda_2;$$

$$K_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Postopek v primeru splošnega modela procesa je dan spodaj.

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_f \mathbf{x}(t)$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_c(s) &= s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0 \\
&= (s + \lambda_1)(s + \lambda_2) \cdots (s + \lambda_n) = 0
\end{aligned}$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K}| = \alpha_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

4.1.1 Načrtovanje regulatorja stanj s pomočjo Ackermannove formule

Ackermannova formula omogoča direktni izračun parametrov regulatorja stanj. Predpostavimo zapis sistema v obliki prenosne funkcije

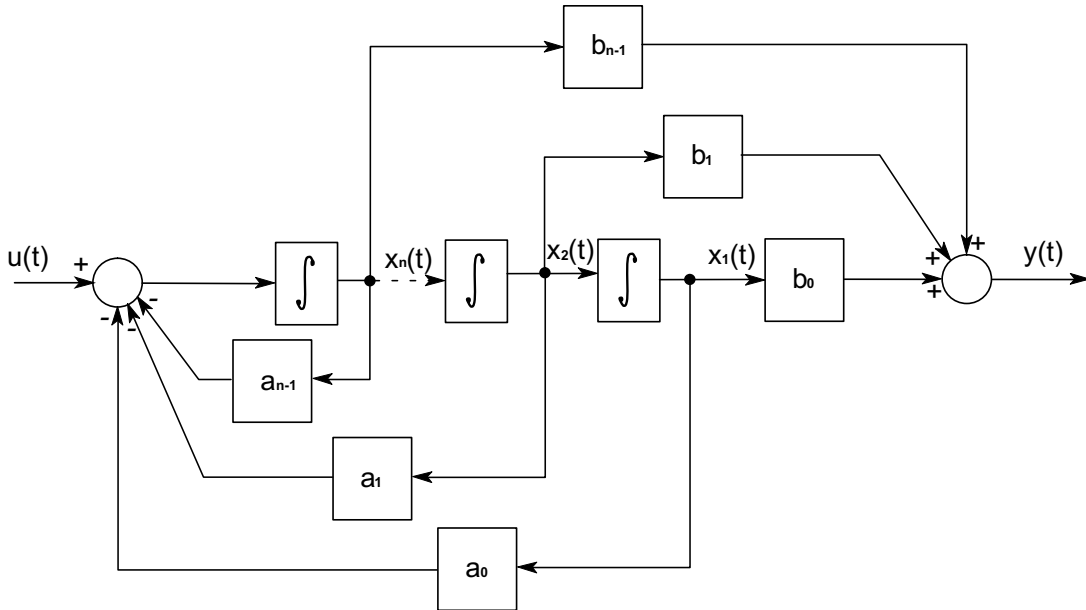
$$G_p(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

in ga transformirajmo v vodljivostno-kanonično obliko:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [b_0 \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{n-1}] \mathbf{x}(t).$$

Bločni diagram vodljivostne kanonične oblike je prikazan na sliki 4.3.



Slika 4.3: Vodljivostna kanonična oblika

Regulirni zakon podamo v obliki regulatorja stanj

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t).$$

Zaprtozančno sistemsko matriko lahko nato zapišemo kot $\mathbf{A}_f$:

$$\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & K_{n-1} & K_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ K_1 & \cdots & K_{n-1} & K_n \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_f = \mathbf{A} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - K_1 & -a_1 - K_2 & -a_2 - K_3 & \cdots & -a_{n-1} - K_n \end{bmatrix}.$$

Karakteristično enačbo zaprtozančnega sistema lahko zapišemo kot

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| = s^n + (a_{n-1} + K_n)s^{n-1} + \cdots + (a_1 + K_2)s + (a_0 + K_1) = 0,$$

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \cdots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0.$$

Parametre regulatorja stanj lahko izrazimo kot

$$\alpha_{i-1} + K_i = \alpha_{i-1},$$

$$K_i = \alpha_{i-1} - a_{i-1} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Ackermannova metoda omogoča izračun regulatorja stanj v matrični obliki z izrazom

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \cdots 0 \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \cdots \ \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B} \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}),$$

$$\alpha_c(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n + \alpha_{n-1}\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + \alpha_1\mathbf{A} + \alpha_0\mathbf{I}.$$

Primer 4.2. $\triangle$ Za dani sistem v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

želimo načrtati regulator za premikanje polov s pomočjo Ackermannove formule, tako da dobimo želeni karakteristični polinom:

$$\alpha_c(s) = s^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)s + \lambda_1\lambda_2 = 0.$$

Regulator vodi položaj satelita.

Rešitev

Najprej moramo izračunati matriko $[\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1}$ ter polinom $\alpha_c(\mathbf{A})$.

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \alpha_c(\mathbf{A}) &= \mathbf{A}^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)\mathbf{A} + \lambda_1\lambda_2\mathbf{I} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo matriko ojačenja $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= [0 \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}) \\ &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 & \lambda_1\lambda_2 \end{bmatrix} \\ &= [\lambda_1\lambda_2 \ \lambda_1 + \lambda_2] = [\mathbf{K}_1 \ \mathbf{K}_2]. \end{aligned}$$

Primer 4.3. $\triangle$ Slika 4.4 prikazuje regulacijski sistem iz prejšnjega primera. Predpostavimo, da imamo pri načrtovanju zahtevo, da je sistem kritično dušen z umiritvenim časom 1 s ($4\tau = 1s$).

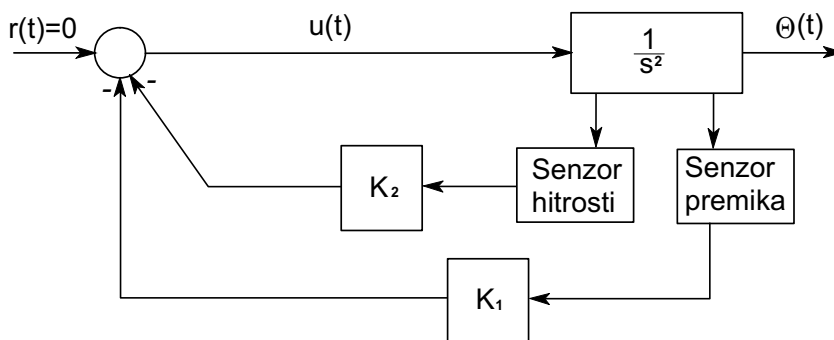
Rešitev

Zahteva rezultira v časovni konstanti $\tau = 0,25$ s ter željenih polih pri $s_{1,2} = -4$, torej je $\lambda_1 = \lambda_2 = 4$. Želeni karakteristični polinom je tako:

$$\alpha_c(s) = (s + 4)^2 = s^2 + 8s + 16.$$

Zahtevani ojačenji iz prejšnjega primera sta:

$$K_1 = \lambda_1\lambda_2 = 16, \quad K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 8.$$



Slika 4.4: Regulacijska shema z regulatorjem stanj

Iz bločnega diagrama na sliki 4.4 dobimo prenosno funkcijo

$$T(s) = \frac{\Theta(s)}{R(s)} = \frac{s^{-2}}{1 + 8s^{-1} + 16s^{-2}} = \frac{1}{s^2 + 8s + 16}.$$

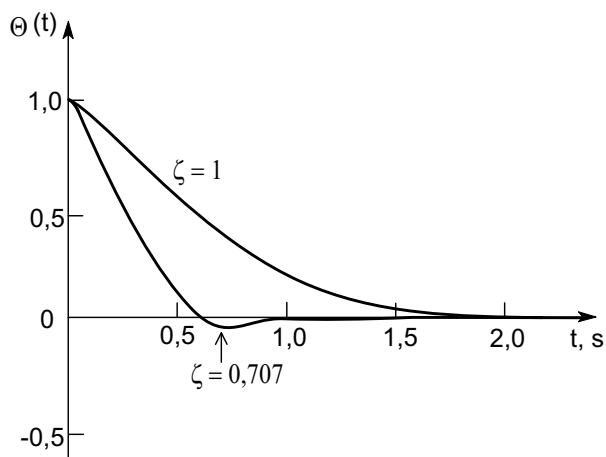
Odziv funkcije $T(s)$ na začetno stanje $\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0]$ pri $\zeta = 1$ je prikazan na sliki 4.5.

Predpostavimo, da imamo ob dani zahtevi $\tau = 0,25s$ še zahtevo $\zeta = 0,707$. Zato sta željena pola premaknjena in sta $s_{1,2} = -4 \pm j4$:

$$K_1 = \lambda_1 \lambda_2 = (4 + j4)(4 - j4) = 32,$$

$$K_2 = \lambda_1 + \lambda_2 = 4 + j4 + 4 - j4 = 8.$$

Zaprtozančni karakteristični polinom je tako



Slika 4.5: Odzivi na začetna stanja

$$(s + 4 + j4)(s + 4 - j4) = s^2 + 8s + 32.$$

Odziv sistema na začetno stanje $\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0]$ pri $\zeta = 0,707$ je prikazan na sliki 4.5.

Na sliki 4.5 je opazna razlika v odzivih med $\zeta = 0,707$ in $\zeta = 1$. Čeprav imamo enako časovno konstanto $\tau = 0,25$, odziv sistema pri $\zeta = 0,707$ hitreje pada in ima zelo majhen prevzpon. To je eden izmed vzrokov, zakaj pogosto izberemo dušenje ζ z vrednostjo 0,707. Za izris odzivov uporabimo izpisani Matlabov program (odziv sistema na začetno stanje $\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0]$ pri $\zeta = 0,707$):

```
alphac=[1 8 32];
A=[0 1;0 0]; B=[0;1]; M=[0 1];
AB(1:2,1)=B; AB(1:2,2)=A*B
K=M*inv(AB)*polyvalm(alphac,A)
disp('Pritisnite tipko za nadaljevanje ...'), pause
Af=A-B*K;
A=Af; B=[0;0]; C=[1 0]; D=0;
x0=[1;0];
sys=ss(A,B,C,D,x0);
[y,t,x]=sim(sys);
plot(timel,y)
title('Odziv na stopnico')
xlabel('Cas')
ylabel('Amplituda')
```

4.2 Načrtovanje observatorja stanj

Največkrat vsa stanja v sistemu niso dostopna. V tem primeru lahko z uporabo observatorja oziroma estimatorja stanj ocenjujemo stanja sistema na osnovi modela in izhoda iz procesa. Predpostavimo model procesa v prostoru stanj

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t), \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t).\end{aligned}$$

Observator stanj lahko zapišemo z enačbo

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H}u(t) + \mathbf{G}y(t),$$

kjer je potrebno izbrati matriko $\mathbf{G}$ tako, da bo ocena stanj čim hitrejša in natančnejša.

Izpeljava observatorja stanj je naslednja:

$$\mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C};$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{B}.$$

Enačbo observatorja stanj lahko zapišemo z naslednjo enačbo:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t).$$

Enačbi napake ocene stanj sta

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t),$$

$$\dot{\mathbf{e}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\mathbf{e}.$$

Z izbiro matrike $\mathbf{G}$ lahko vplivamo na dinamiko observatorja s pomočjo premikanja njegovih polov.

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}| = 0$$

Če določimo dinamiko observatorja s spodnjim željenim karakterističnim polinomom

$$\alpha_c(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0 = 0,$$

$$|s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{GC}| = \alpha_e(s).$$

potem lahko observator zapišemo na naslednji način:

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 4.4. $\triangle$ Predpostavimo sistem v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Za dani sistem načrtajmo observator stanj, ki je kritično dušen ter ima časovno konstanto $\tau = 0,1s$.

Rešitev

$$\alpha_e(s) = (s^2 + 10)^2 = s^2 + 20s + 100$$

$$\alpha_e(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 20 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Matlabov program, ki izračuna regulator za premikanje polov, je:

```
alphae=[1 20 100];
A=[0 1;0 0]; C=[1 0]; M=[0;1];
CA(1,1:2)=C; CA(2,1:2)=C*A;
G=polyvalm(alphae,A)*inv(CA)*M
```

Primer 4.5. $\triangle$ Predpostavimo sistem v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Za sistem smo načrtali regulator in observator stanj. Regulator stanj ima matriko parametrov $\mathbf{K} = [32 \ 8]$, ki postavi pole v $s = -4 \pm j4$, observator pa matriko $\mathbf{G} = [20 \ 100]^T$. Določite zapis v prostoru stanj za sklop observator-regulator stanj.

Rešitev

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{B}u(t) + \mathbf{G}y(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC} - \mathbf{BK})\hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{G}y(t)$$

$$u(t) = -\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{x}}(t) \quad \mathbf{GC} = \begin{bmatrix} 20 & 100 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 100 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [32 \ 8] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 32 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{GC} - \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 20 & 0 \\ 100 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 32 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{bmatrix}$$

Zapis za sklop observator-regulator stanj v prostoru stanj je $\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} y(t)$,
 $u(t) = [-32 \ -8]x(t)$.

Primer 4.6. $\triangle$ Za sistem z observatorjem in regulatorjem stanj, ki je dan spodaj, obravnavajte zaprtozančni odziv. Model sistema v prostoru stanj je dan z enačbama

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0]\mathbf{x}(t).$$

zapis za sklop observator-regulator pa je dan z naslednjima enačbama:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(t) + \begin{bmatrix} 20 \\ 100 \end{bmatrix} y(t),$$

$$u(t) = [-32 \ -8]x(t).$$

Rešitev

Če definiramo $\mathbf{x}_3(t) = \hat{\mathbf{x}}_3(t)$ in $\mathbf{x}_4(t) = \hat{\mathbf{x}}_4(t)$, potem lahko celotni zaprtozančni sistem zapišemo z naslednjo matrično diferencialno enačbo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & -8 \\ 20 & 0 & -20 & 1 \\ 100 & 0 & -132 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 20 \\ 100 \end{bmatrix} r(t).$$

$$\Theta(t) = [1 \ 0 \ 0 \ 0][x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]^T$$

$$\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0 \ 1 \ 0]$$

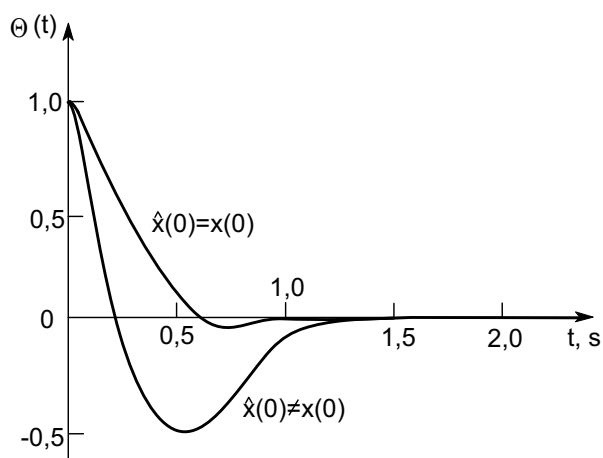
$$\mathbf{x}^T(0) = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

A=[0 1;0 0]; B=[0;1]; C=[1 0];

K=[32 8]; G=[20;100];

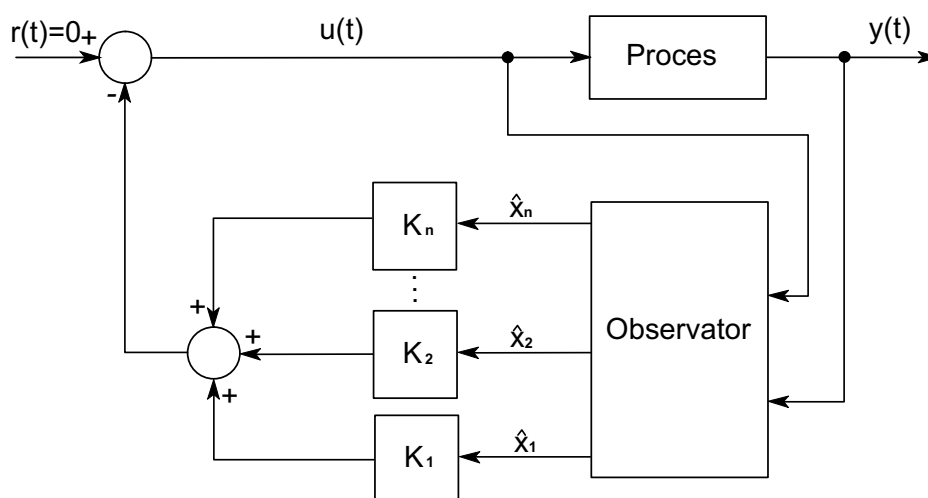
Af=A-G*C-B*K;

[Gecnum,Gecden]=ss2tf(Af,G,K,0)



Slika 4.6: Odziv zaprtozančnega sistema

$$\alpha_e(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{G}\mathbf{C}| = 0$$



Slika 4.7: Shema sistema z observatorjem stanj

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{e}}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & \mathbf{B}\mathbf{K} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{e}(t) \end{bmatrix}$$

Primer 4.7. $\triangle$ Za zgornji primer napravite analizo zaprtozančnega obnašanja.

Rešitev

$$\begin{aligned}\alpha_c(s)\alpha_e(s) &= (s^2 + 8s + 32)(s^2 + 20s + 100) \\ &= s^4 + 28s^3 + 292s^2 + 1440s + 3200 = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 + G_{ec}(s)G_p(s) &= 1 + \left(\frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292} \right) \left(\frac{1}{s^2} \right) = 0 \\ s^4 + 28s^3 + 292s^2 + 1440s + 3200 &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| &= 0 \\ |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_f| &= \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 32 & 8 \\ -20 & 0 & s+20 & -1 \\ -100 & 0 & 132 & s+8 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

```
A=[0 1;0 0]; B=[0;1]; C=[1 0];
K=[32 8]; G=[20;100];
order=length(C)
BA=G*C;
BB=A+AB-BA;
order1=order+1;
order2=2*order;
ACL(order2,order2)=0;
ACL(1:order,1:order)=A;
ACL(1:order,order1:order2)=AB;
ACL(order1:order2, 1:order)=BA;
ACL(order1:order2,order1:order2)=BB;
ACL
eig(ACL)
```

4.2.1 Povzetek

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

Regulator stanj

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]^{-1}\alpha_c(A)$$

Observator stanj

$$\mathbf{G} = \alpha_e(\mathbf{A}) \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Prehajanje stanj, vodljivost in spoznavnost

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

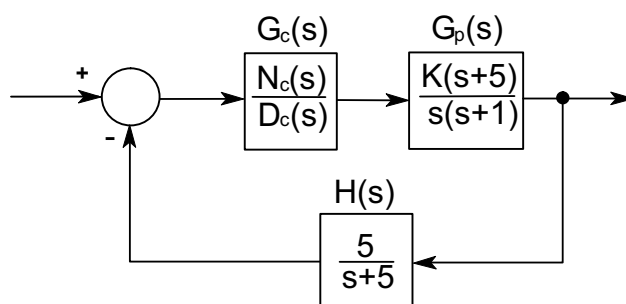
$$\mathbf{0} = \Phi(t_0)\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_0} \Phi(t_0-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \dots \ \mathbf{A}^{n-2} \mathbf{B} \ \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}]$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = \mathbf{C}\Phi(t)\mathbf{x}(0) + \mathbf{C} \int_0^t \Phi(t-\tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-2} \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

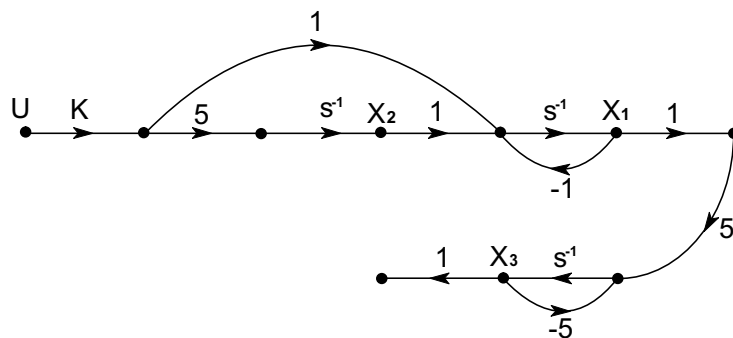
Primer 4.8. $\triangle$ Določite vodljivost ter spoznavnost sistema sistem na sliki 4.8.



Slika 4.8: Zaprtizančni sistem

Rešitev

Sistem najprej zapišemo v prostoru stanj s pomočjo diagrama poteka signalov na sliki 4.9.



Slika 4.9: Diagram poteka signalov

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} K \\ 5K \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t)$$

Če želimo preveriti vodljivost, moramo najprej izračunati matriki $\mathbf{AB}$ ter $\mathbf{A}^2\mathbf{B}$:

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 5K \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4K \\ 0 \\ 5K \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}^2\mathbf{B} = \mathbf{AAB} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4K \\ 0 \\ 5K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4K \\ 0 \\ -5K \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{B} \ \mathbf{AB} \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] = \begin{bmatrix} K & 4K & -4K \\ 5K & 0 & 0 \\ 0 & 5K & -5K \end{bmatrix}.$$

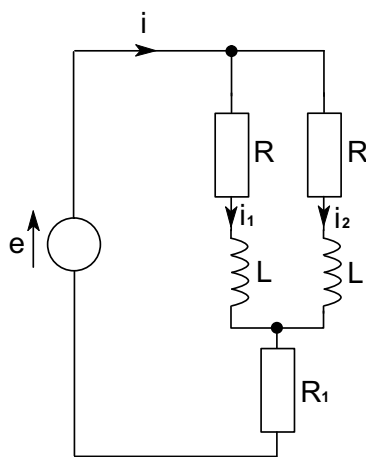
V zgornji matriki je moč opaziti, da je produkt drugega stolpca z -1 enak tretjemu stolpcu. Torej je determinanta te matrike enaka nič. Sistem ni vodljiv.

Za določitev spoznavnosti pa potrebujemo matriki $\mathbf{CA}$ ter $\mathbf{CA}^2$.

$$\mathbf{CA} = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = [5 \ 0 \ -5]$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{CA}^2 = \mathbf{CAA} &= [5 \ 0 \ -5] \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \end{bmatrix} = [-30 \ 5 \ 25] \\
 \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \\ -30 & 5 & 25 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Primer 4.9. $\triangle$ Za električno vezje na sliki 4.10 določite, ali je vodljivo.



Slika 4.10: Električno vezje

Rešitev

$$\begin{aligned}
 Ri_1 + L \frac{di_1}{dt} + R_1(i_1 + i_2) &= e \\
 Ri_2 + L \frac{di_2}{dt} + R_1(i_1 + i_2) &= e \\
 \frac{di_1}{dt} &= -\left(\frac{R+R_1}{L}\right)i_1 - \frac{R_1}{L}i_2 + \frac{1}{L}e \\
 \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R_1}{L}i_1 - \left(\frac{R+R_1}{L}\right)i_2 + \frac{1}{L}e \\
 \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{R+R_1}{L} & -\frac{R_1}{L} \\ -\frac{R_1}{L} & -\frac{R+R_1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -\frac{R+2R_1}{L^2} \\ -\frac{R+2R_1}{L^2} \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{A}_c &= [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{R+2R_1}{L^2} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R+2R_1}{L^2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Determinanta $\mathbf{A}_c$ je enaka nič, kar pomeni, da je sistem nevodljiv.

4.3 Sistemi z referenčno vrednostjo

V prejšnjih izvajanjih smo pri vseh primerih predpostavili, da je referenca enaka nič in da opazujemo delovanje sistema v odvisnosti od začetnih stanj. V nadaljevanju pa bodo predstavljeni primeri, ko imamo referenčno vrednost, ki je različna od nič. Predpostavimo sistem v prostoru stanj, kjer je izhod sistema enak enemu od stanj (prvemu v tem primeru):

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t),$$

$$y(t) = x_1(t).$$

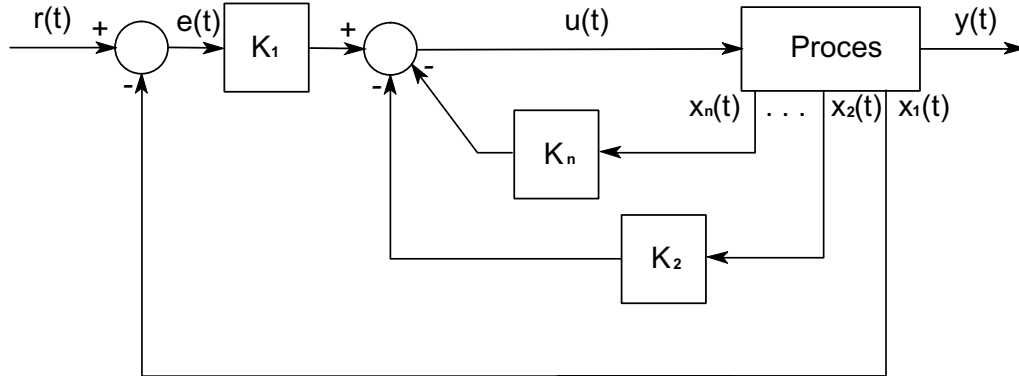
Regulirni zakon v primeru $r(t)$ ($K_1 = K_r$) lahko zapišemo kot:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_r r(t),$$

$$u(t) = -K_1 x_1(t) - K_2 x_2(t) - \dots - K_n x_n(t) + K_r r(t),$$

$$u(t) = K_1[r(t) - x_1(t)] - K_2 x_2(t) - \dots - K_n x_n(t).$$

Slika 4.11 prikazuje regulacijsko shemo z regulatorjem stanj v primeru referenčnega signala, ki je različen od nič.



Slika 4.11: Regulacijska shema v primeru referenčne spremenljivke

Primer 4.10. $\triangle$ Dan je sistem v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

$$y(t) = [1 \ 0] \mathbf{x}(t).$$

Narišite regulacijsko shemo z regulatorjem stanj pri referenčnem signalu. Sistem reguliramo z regulatorjem stanj, ki ima matriko ojačenj

$$\mathbf{K} = [32 \ 8].$$

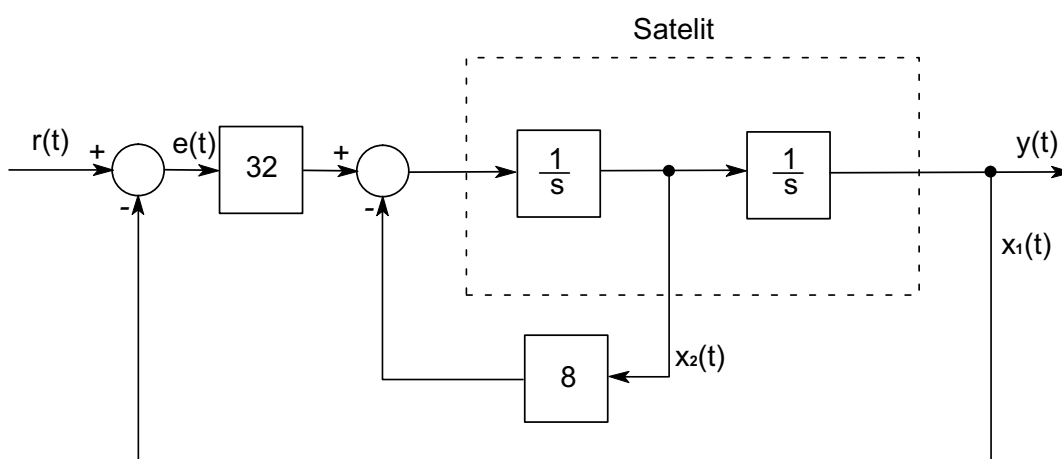
Rešitev

Če v sistem uvedemo enotino povratno zanko, dobimo regulirni zakon

$$u(t) = 32[r(t) - x_1(t)] - 8x_2(t) = 32[r(t) - y(t)] - 8x_2(t).$$

ter sistem, ki je prikazan na sliki 4.12. Sistem je integrirnega tipa, zato nima pogreška v ustaljenem stanju. O tem se lahko prepričamo na sliki 4.13, ki prikazuje odziv sistema na stopnico. Odziv izriše naslednja skript-datoteka v programskem paketu Matlab:

```
Gnum = [0 0 32]; Gden = [1 8 0]
Tnum = Gnum; Tden = Gnum + Gden;
step(Tnum,Tden)
```



Slika 4.12: Regulator stanj v primeru referenčne spremenljivke

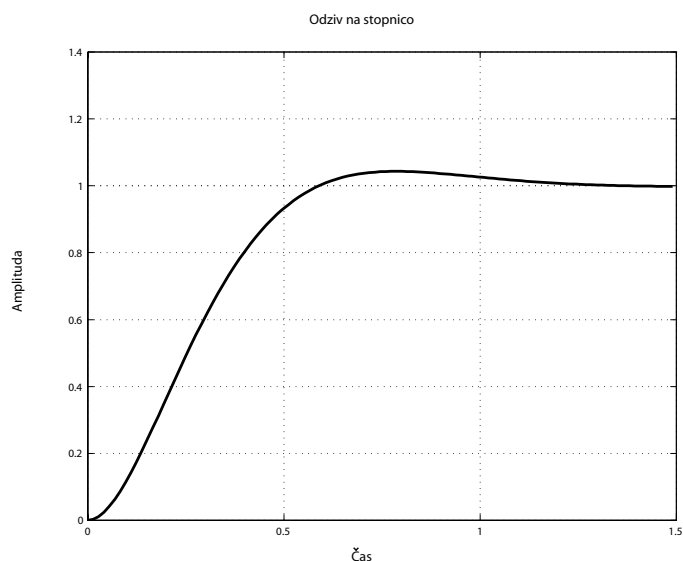
4.3.1 Regulator stanj pri referenčni spremenljivki in izhodu sistema kot linearni kombinaciji stanj

Predpostavimo splošni primer, ko je izhod sistema linearna kombinacija stanj sistema:

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t).$$

V tem primeru regulirni zakon pri referenčni spremenljivki, ki je različna od nič, zapišemo v naslednji obliki:

$$u(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) + K_r r(t) = K_a[r(t) - y(t)] - \mathbf{K}_b\mathbf{x}(t),$$



Slika 4.13: Odziv regulatorja stanj na referenčno spremenljivko

$$u(t) = K_a r(t) - K_a \mathbf{C} \mathbf{x}(t) - \mathbf{K}_b \dot{\mathbf{x}}(t) = K_a r(t) - [K_a \mathbf{C} + \mathbf{K}_b] \dot{\mathbf{x}}(t),$$

$$K_a \mathbf{C} + \mathbf{K}_b = \mathbf{K}.$$

$$\begin{aligned} K_a c_1 + K_{1b} &= K_1 \\ K_a c_2 + K_{2b} &= K_2 \\ &\vdots \\ K_a c_n + K_{nb} &= K_n \end{aligned}$$

4.4 Naloge

Primer 4.11. Dan je linearni, časovno nespremenljivi sistem v prostoru stanj: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$.

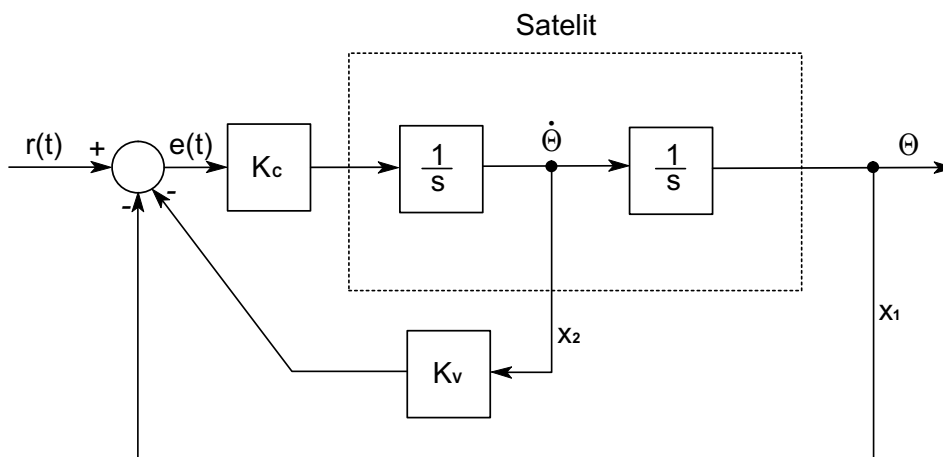
- Podajte pogoje za matriko $\mathbf{A}$, ki zagotavljajo stabilnost sistema.
- Predpostavite, da je sistem vzburjan z vhom $u(t)$ pri začetnih pogojih $\mathbf{x}(0)$. Dokažite, da je odziv sistema $\mathbf{x}(t)$ sestavljen iz dveh neodvisnih delov: odziva na začetne pogoje ter odziva na vzbujanje. Rezultat je lahko katerakoli izpeljana enačba.

- (c) Predpostavite, da je vhod v sistem konstanten že dalj časa, tako da je ob času $t = 0$ odziv sistema v stacionarnem stanju. Ob času $t = 0$ pa nastopi motnja $\Delta \mathbf{x}(0)$. Dokažite, da je sprememba odziva za $t > 0$ funkcija $\Delta \mathbf{x}(0)$.

Rešitev:

- (a) Koreni karakterističnega polinoma $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}|$ morajo biti v levi polravnini.
- (b) $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$
 $\mathbf{x}(t) = \Phi(t)\mathbf{x}(0) + \int_0^t \Phi(t - \tau)\mathbf{B}u(\tau)d\tau$
- (c) $t < 0$; $\mathbf{x}^-(t) = \mathbf{x}_{ss}$
 Ker je sistem linearen, lahko uporabimo superpozicijo.
 $t > 0$; $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{ss} + \Phi(t)\Delta \mathbf{x}(0)$

Primer 4.12. Bločni diagram sistema vodenja za satelit je dan na sliki 4.14. Senzor kota ima enotno ojačenje, senzor kotne hitrosti pa ima ojačenje K_v . Ojačenje K_c ima funkcijo pretvorbe med napetostjo $e(t)$ in vrtilnim momentom.



Slika 4.14: Bločni diagram iz primera 4.12

- (a) Zapišite zaprtozančni sistem, dan na sliki 4.14, v prostoru stanj, če velja: $x_1(t) = \Theta(z)$ in $x_2(t) = \dot{\Theta}(z)$.
- (b) Poiščite karakteristični polinom sistema, dobljenega pri točki (a).

- (c) Dan je želeni karakteristični polinom $\alpha_c(s) = s^2 + 8s + 16$. S pomočjo rezultatov, dobljenih v primeru (b), določite vrednosti konstant K_v in K_c tako, da bosta polinoma enaka.

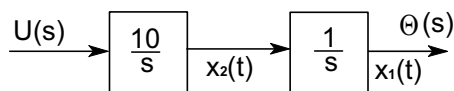
Rešitev

$$(a) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_c & -K_c K_v \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_c \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$(b) \quad |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ K_c & s + K_c K_v \end{vmatrix} = s^2 + sK_v K_c + K_c = 0$$

$$(c) \quad \begin{aligned} s^2 + sK_v K_c + K_c &= s^2 + 8s + 16 = 0 \\ K_c &= 16 \quad K_c K_v = 8 \implies K_v = 0,5 \end{aligned}$$

Primer 4.13. Predpostavite, da ima satelit, prikazan na bločnem diagramu (slika 4.14), spremenjeno vztrajnost, tako da je prenosna funkcija integratorja, ki ima izhod $x_2(s)$, enaka $\frac{10}{s}$. Spremenjeni del bločnega diagrama je prikazan na sliki 4.15.



Slika 4.15: Bločni diagram iz primera 4.13

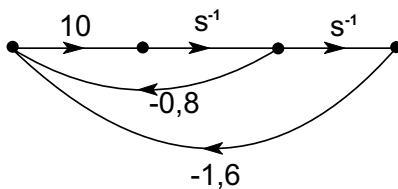
- (a) Sistem, ki ga prikazuje slika 4.15, zapišite v prostoru stanj.
- (b) Načrtajte regulator za premikanje polov s pomočjo Ackermannove formule, če je želeni karakteristični polinom $\alpha_c(s) = s^2 + 8s + 16$.
- (c) Narišite diagram poteka signalov zaprtozanknega sistema, dobljenega pod točko (b). S pomočjo Masonove formule dokažite, da ima dobljeni sistem želeni karakteristični polinom $\alpha_c(s) = s^2 + 8s + 16$.

Rešitev

$$(a) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \ 0] \mathbf{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b) \quad \alpha_c(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 8 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 16 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \\
\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \end{bmatrix} \\
[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K} &= [1 \ 0][\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}]^{-1}\alpha_c(\mathbf{A}) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 0 & 0,1 \\ 0,1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 8 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \\
\mathbf{K} &= [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1,6 \\ 1,6 & 0,8 \end{bmatrix} = [1,6 \ 0,8]
\end{aligned}$$

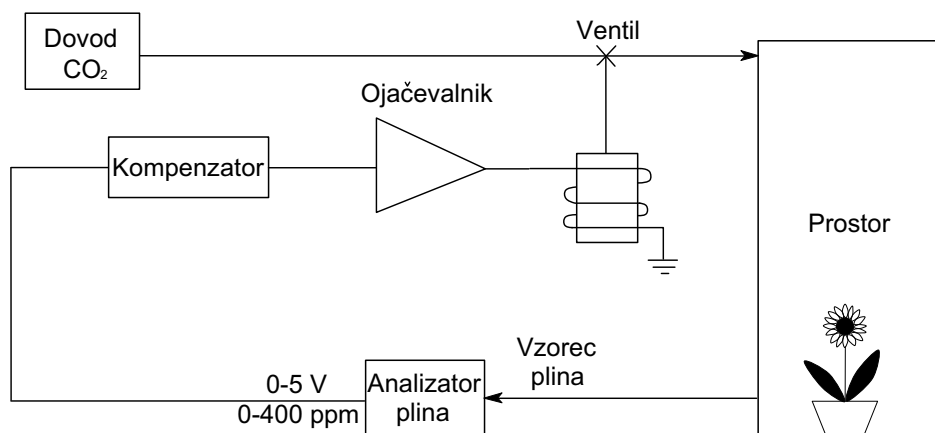
- (c) Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 4.16.
 $\Delta(s) = 1 - (-8s^{-1} - 16s^{-2}) \implies s^2 + 8s + 16 = 0$



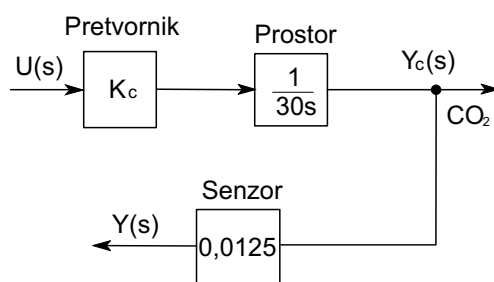
Slika 4.16: Diagram poteka signalov iz primera 4.13c

Primer 4.14. Na sliki 4.17(a) je prikazan sistem za preučevanje vpliva ogljikovega dioksida na rastline. Bločni diagram tega sistema, ki vključuje tudi senzor, je prikazan na sliki 4.17(b). Vhod $u(t)$ je napetost, ki krmili ventil za dovajanje ogljikovega dioksida. Izhod $y_c(t)$ nam pove koliko ogljikovega dioksida je v testnem prostoru. Zaradi poenostavitve zanemarimo mrtvi čas senzorja (čas, ki je potreben za analizo plina), tako da je izhod iz senzorja kar $y(t)$.

- Napišite prenosno funkcijo sistema (pretvornik, prostor, senzor) tako, da izberete za spremenljivko stanja izhod senzorja $y(t)$. To dosežete s tem, da v modelu ojačenje senzorja postavite pred integrator.
- Povežite vhod $u(t)$ z izhodom $-y(t)$, tako da dobite zaprtozančni sistem. Določite časovno konstanto sistema (v sekundah), če je $K_c = 1$.
- Določite K_c tako, da bo časovna konstanta sistema $\tau = 1$ minuta.
- V točki (c) se je spremenil pol, kljub temu da tega nismo zahtevali. Določite karakteristični polinom $\alpha_c(s)$ dobljenega sistema.



(a)



(b)

Slika 4.17: Funkcijski in bločni diagram iz primera 4.14

(e) Predpostavite, da je $K_c = 10$. Načrtajte regulator za premikanje polov s pomočjo Ackermannove formule ter karakterističnega polinoma $\alpha_c(s)$ iz točke (d).

(f) Narišite bločna diagrama za primera (c) in (e).

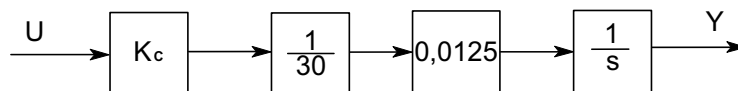
(g) Dokazite, da sta bločna diagrama iz točke (f) ekvivalentna.

Rešitev

(a) Bločni diagram je prikazan na sliki 4.18.

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{0,0125}{30} K_c u = 0,0004167 K_c u ; \quad \mathbf{y} = \mathbf{x}$$

$$(b) \quad 1 + \frac{0,0125 K_c}{30s} = 0 \\ s + 0,0004167 = s + \frac{1}{\tau} = 0 \implies \tau = 2400 \text{ s}$$



Slika 4.18: Bločni diagram iz primera 4.14a

$$(c) \quad 1 + \frac{0,0004167K_c}{s} = 0 \implies s + 0,0004167K_c = s + \frac{1}{60} = 0$$

$$K_c = \frac{1}{60(0,0004167)} = 40$$

$$(d) \quad \alpha_c(s) = 60s + 1 = 0 \implies s + \frac{1}{60} = s + 0,01667 = 0$$

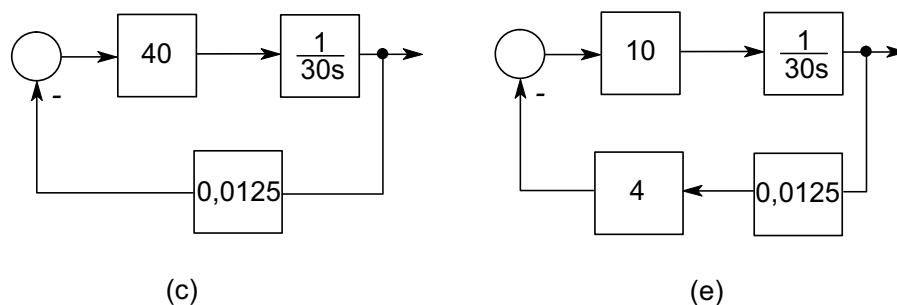
$$(e) \quad \text{Iz rešitve (a): } \dot{x} = Ax + Bu \implies A = 0 ; B = 0,004167$$

$$\alpha_c(s) = s + 0,01667$$

$$K = [1][B]^{-1}\alpha_c(A) = \frac{1}{0,004167}(0,01667) = 4$$

$$\text{Preizkus: } |sI - A + BK| = s - 0 + 4 \cdot 0,004167 = s + 0,01667$$

(f) Bločna diagrama sta prikazana na sliki 4.19.



Slika 4.19: Bločna diagrama iz primera 4.14f

$$(g) \quad \text{Zančni ojačeni: } \frac{40 \cdot 0,0125}{30s} = \frac{10 \cdot 4 \cdot 0,0125}{30s}.$$

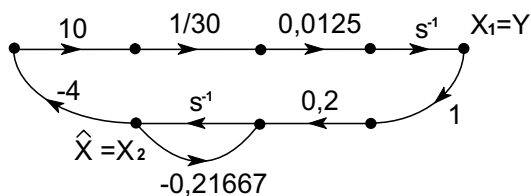
Primer 4.15. Predpostavite sistem za preučevanje vpliva ogljikovega dioksida iz prejšnje naloge (slika 4.17). Predpostavite, da je $K_c = 10$.

(a) Naj bo izhod senzorja na sliki 4.17(b) moten s šumom, tako da je potreben observator. Načrtajte observator, ki bo ocenjeval izhod senzorja $y(t)$. Časovna konstanta observatorja naj bo $5s$.

- (b) Zapišite enačbo sklopa observator-regulator stanj, kjer je $y(t)$ vhod, $u(t)$ pa izhod sistema.
- (c) Narišite diagram poteka signalov za celoten sistem, kjer je $X_1(t)$ stanje procesa, $X_2(t)$ pa stanje observatorja.
- (d) Zapišite sistem, ki ste ga dobili pod točko (c), v prostoru stanj.
- (e) Dokazite, da je karakteristični polinom sistema enak $\alpha_c(s)\alpha_e(s)$ (uporabite rezultate dobljene pod točko (e)).

Rešitev

- (a) $\alpha_e(s) = \tau s + 1 = 5s + 1 \implies s + 0,2 = 0$
 Iz prejšnje naloge: $\dot{x} = 0,004167u$; $y = x$
 $A = 0$; $B = 0,004167$; $C = 1$
 $G = \alpha_e(A)[C]^{-1}[1] = 0,2 \cdot 1^{-1} \cdot (1) = 0,2$
- (b) $\dot{\hat{x}}(t) = (A - GC - BK)\hat{x}(t) + Gy(t) = -0,21667\hat{x}(t) + 0,2y(t)$
 $u(t) = -K\hat{x}(t) = -4\hat{x}(t)$
- (c) Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 4.20.



Slika 4.20: Diagram poteka signalov iz primera 4.15d

(d) $\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & -0,01667 \\ -0,2 & -0,21667 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{A}_f \mathbf{x}$

(e) $|s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s & 0,01667 \\ -0,2 & s + 0,21667 \end{vmatrix} = s^2 + 0,21667s + 0,00333$
 $\alpha_c(s)\alpha_e(s) = (s + 0,01667)(s + 0,2) = s^2 + 0,21667s + 0,00333$

Primer 4.16. Predpostavite sistem za preučevanje vpliva ogljikovega dioksida na sliki 4.17. Sistem ima karakteristični polinom $\alpha_c(s) = s + 0,01667$ ter ojačenje $K=4$ ($K_c = 10$). Observatorjev karakteristični polinom pa je $\alpha_e(s) = s + 0,2$ z ojačenjem $G=0,2$.

- Napišite prenosno funkcijo sistema (pretvornik, prostor, senzor), tako da izberete za spremenljivko stanja izhod senzorja $y(t)$. To dosežete s tem, da v modelu ojačenje senzorja postavite pred integrator.
- Določite observatorjevo prenosno funkcijo $G_{ec}(s) = -U(s)/Y(s)$.
- Izračunajte prenosno funkcijo procesa $G_p = Y(s)/U(s)$.
- Dokažite, da je karakteristični polinom dan z $1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 0$.

Rešitev

- $\dot{x} = 0,004167u$; $y = x$
- $G_{ec}(s) = K[sI - A + GC + BK]^{-1}G = \frac{4 \cdot 0,2}{s+0,012667} = \frac{0,8}{s+0,021667}$
- $G_p(s) = C(sI - A)^{-1}B = 0,004167$
- $1 + G_{ec}(s)G_p(s) = 1 + \frac{0,8 \cdot 0,004167}{s(s+0,021667)} = 0$
 $s^2 + 0,0021667s + 0,00333 = 0$ $\alpha_c(s)\alpha_e(s) = (s + 0,01667)(s + 0,2) =$
 $s^2 + 0,21667s + 0,00333$

Primer 4.17. Dokažite, da lahko Ackermannovo formulo za premikanje polov uporabimo za načrtovanje observatorjev.

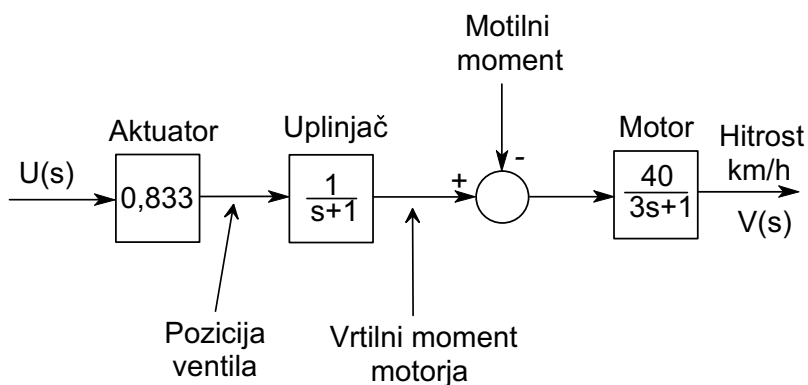
Rešitev

Ackermannova formula: $\alpha_c = |sI - A + BK| = |sI - (A - BK)^T|$,
 $\alpha_c = |sI - A^T - K^T B^T|$.
 $K^T = \left([0 \cdots 0 \ 1][B \ AB \cdots A^{n-1}B]^{-1} \alpha_c(A) \right)^T$
 $\alpha_e = |sI - A + GC|$
 Če upoštevamo $\alpha_c \rightarrow \alpha_e$, $A \rightarrow A^T$, $G \rightarrow K^T$, $C \rightarrow B^T$, sledi

$$G = \left([0 \dots 0 \ 1] [C^T \ A^T C^T \dots A^T \ A^{n-1} C^T]^{-1} \alpha_e(A^T) \right)^T$$

$$G = \alpha_e(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Primer 4.18. Na sliki 4.21 je prikazan odprtozančni bločni diagram, ki predstavlja sistem avtomobila. Zaradi poenostavitve zanemarimo moment motnje (avtomobil potuje po ravni podlagi).



Slika 4.21: Bločni diagram iz primera 4.18

- Sistem, ki ga prikazuje slika 4.21, zapišite v prostoru stanj. Stanje $x_1(t)$ naj bo hitrost avtomobila, $x_2(t)$ pa vrtilni moment motorja.
- Določite odprtozančno prenosno funkcijo $V(s)/U(s)$ sistema na sliki 4.21. Uporabite dane prenosne funkcije.
- Določite odprtozančno prenosno funkcijo iz prostora stanj, ki ste jo dobili pod točko (a), ter jo primerjajte s prenosno funkcijo, dobljeno pod točko (b). Na ta način lahko preverimo model, zapisan v prostoru stanj.
- Preverite prenosno funkcijo, dobljeno pod točko (c), s pomočjo Matlaba.

Rešitev

$$(a) \quad \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,833 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$(b) G_p(s) = \frac{0,833 \cdot 40}{(s+1)(3s+1)} = \frac{11,11}{(s+1)(s+0,3333)}$$

$$(c) |s\mathbf{I} - \mathbf{A}| = s^2 + 1,333s + 0,3333 = \Delta$$

$$G_P(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\mathbf{B} = [1 \ 0] \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s+1 & 13,333 \\ 0 & s+0,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,833 \end{bmatrix}$$

$$G_P(s) = \frac{11,11}{s^2 + 1,333s + 0,3333}$$

(d) `A=[-0.3333 13.333 ; 0 -1]; B=[0;0.833]; C=[1 0];`
`[Gpnum,Gpden]=ss2tf(A,B,C,0)`
`pause`
`alphac=[1 4 4];`
`A=[-0.3333 13.333 ; 0 -1]; B=[0;0.833]; M=[0 1];`
`AB(1:2,1)=B; AB(1:2,2)=A*B;`
`K=M*inv(AB)*polyvalm(alphac,A)`
`pause`
`Af=A-B*K`
`p=poly(Af)`

Primer 4.19. Predpostavimo naslednji sistem v prostoru stanj

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,833 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}.$$

- (a) Izračunajte časovni konstanti odprtozančnega sistema.
- (b) Načrtajte regulator za premikanje polov tako, da dobimo kritično dušen sistem s časovno konstanto, ki je enaka polovici hitrejše časovne konstante dobljene v točki (a). Določite željeni karakteristični polinom $\alpha_c(s)$.
- (c) Preverite rezultate iz točke (b) z uporabo Matlaba.
- (d) Preverite rezultate iz točke (b) tako, da izračunate karakteristični polinom $\alpha_c(s) = |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}|$.

Rešitev

- (a) poli: $s_1 = -1, s_2 = -0,3333 \implies \tau_1 = 1 \text{ s},$
 $\tau_2 = \frac{1}{0,3333} = 3 \text{ s}$
- (b) $\tau = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s};$ koreni karakterističnega polinoma: $s_{1,2} = -2$
 $\alpha_c(s) = (s+2)^2 = s^2 + 4s + 4$

$$\begin{aligned}\alpha_c(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + 4 \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2,7780 & 35,555 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0,833 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11,106 \\ -0,833 \end{bmatrix} \\ [\mathbf{B} \ \mathbf{AB}]^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 11,106 \\ 0,833 & -0,833 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{-1}{9,251} \begin{bmatrix} -0,833 & -11,106 \\ -0,833 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$\mathbf{K} = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0,09004 & 1,2005 \\ 0,09004 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,7780 & 35,555 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [0,2501 \ 3,2014]$$

(c) alphac=[1 4 4];
 A=[-0.3333 13.333 ; 0 -1]; B=[0;0.833]; C=[1 0];
 M=[0 1];
 AB(1:2,1)=B;
 AB(1:2,2)=A*B;
 K=M*inv(AB)*polyvalm(alphac,A)

$$\begin{aligned}(d) \ \mathbf{A} - \mathbf{BK} &= \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0,833 \end{bmatrix} [0,2501 \ 3,2014] \\ \mathbf{A} - \mathbf{BK} &= \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ -0,2084 & -3,667 \end{bmatrix} \\ |s\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{BK}| &= \begin{vmatrix} s + 0,3333 & -13,333 \\ 0,2084 & s + 3,667 \end{vmatrix} = s^2 + 4s + 4\end{aligned}$$

Primer 4.20. Sistem v prostoru stanj podajata enačbi

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,833 \end{bmatrix} u; \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}.$$

(a) Načrtajte observator s karakterističnim polinomom $\alpha_e = s^2 + 10s + 25$. Poiščite časovno konstanto observatorja.

(b) S pomočjo Matlaba preverite rezultate dobljene pod točko (a).

Rešitev

$$(a) \alpha_e(s) = (s + 5)^2 = s^2 + 10s + 25, \quad \tau_{1,2} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ s}$$

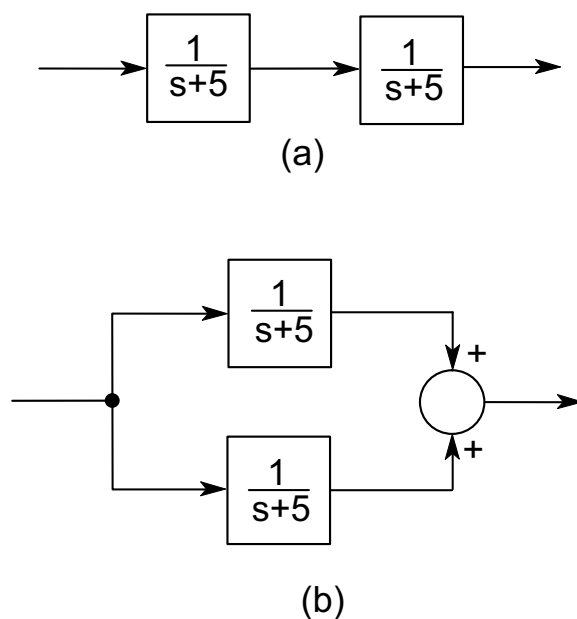
$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{A}) &= \begin{bmatrix} 0,1111 & -17,777 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 10 \begin{bmatrix} -0,3333 & 13,333 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21,778 & 115,55 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{CA} &= [1 \ 0]; \quad \mathbf{A} = [-0,3333 \ 13,333] \\ \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,3333 & 13,333 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{13,333} \begin{bmatrix} 13,333 & 0 \\ 0,3333 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 21,778 & 115,55 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0,02450 & 0,0750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{G} &= \begin{bmatrix} 8,6663 \\ 1,200 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b) \text{ alphas} &= [1 \ 10 \ 25]; \\ \mathbf{A} &= [-0.3333 \ 13.333; \ 0 \ -1]; \quad \mathbf{C} = [1 \ 0]; \\ \mathbf{M} &= [0; 1]; \\ \mathbf{CA}(1,1:2) &= \mathbf{C}; \quad \mathbf{CA}(2,1:2) = \mathbf{C} * \mathbf{A}; \\ \mathbf{G} &= \text{polyvalm(alphas, A) * inv(CA) * M} \end{aligned}$$

Primer 4.21. Upoštevajte bločna diagrama na sliki 4.22.

- Sistem, ki ga prikazuje slika 4.22(a), zapišite v prostoru stanj. Za spremenljivke stanj izberite izhode posameznih blokov.
- Ugotovite, ali je sistem, ki ste ga dobili v točki (a), vodljiv.
- Ugotovite, ali je sistem, ki ste ga dobili v točki (a), spoznaven.
- Sistem, ki ga prikazuje slika 4.22(b), zapišite v prostoru stanj. Za spremenljivke stanj izberite izhode posameznih blokov.
- Ugotovite, ali je sistem, ki ste ga dobili v točki (d), vodljiv.
- Ugotovite, ali je sistem, ki ste ga dobili v točki (d), spoznaven.
- Razložite rezultate iz točk (e) in (f) na podlagi karakteristike sistema.
- Poiščite prenosni funkciji obeh sistemov. Opazimo, da je prenosna funkcija sistema (b) prvega reda, kljub temu da je sistem drugega reda.

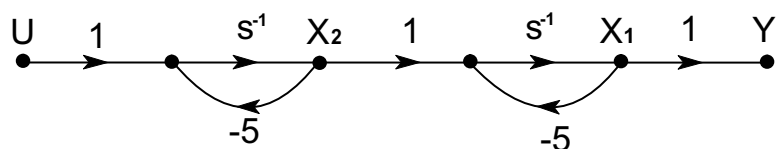


Slika 4.22: Bločna diagrama iz primera 4.21

Rešitev

(a) Na sliki 4.23 je prikazan diagram poteka signalov.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$



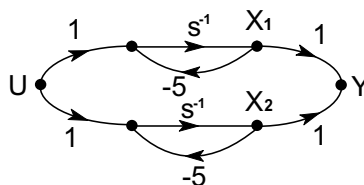
Slika 4.23: Diagram poteka signalov iz primera 4.21a

(b) $|B \ AB| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -1 \Rightarrow \text{vodljiv}$

(c) $\begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \text{spoznaven}$

(d) Na sliki 4.24 je prikazan diagram poteka signalov.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 1] \mathbf{x}$$



Slika 4.24: Diagram poteka signalov iz primera 4.21d

$$(e) \quad |B \ AB| = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{nevodljiv}$$

$$(f) \quad \begin{vmatrix} C \\ CA \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 0 \implies \text{nespoznaven}$$

(g) **Točka (e):** Vhod deluje na obe spremenljivki stanj enakovredno. Stanj ne moremo voditi posamezno, torej sistema ne moremo privedi v poljubno stanje.

Točka (f): Če je $u(t) = 0$, je izhod $y(t) = x_1(t) + x_2(t) = ke^{-5t}$. Stanj ne moremo ločiti.

$$(h) \quad \textbf{Točka (a): } G(s) = \frac{1}{(s+5)^2} = \frac{1}{s^2+10s+25}.$$

$$\textbf{Točka (b): } G(s) = \frac{1}{s+5} \cdot \frac{1}{s+5} = \frac{2}{s+5}.$$

Primer 4.22. Upoštevajte sistem, prikazan na sliki 4.22(b), ki je nevodljiv ter nespoznaven. To je zato, ker je sistem sestavljen iz dveh enakih vzporednih prenosnih funkcij. Sistem je nevodljiv, ker vhod deluje na obe stanji, nespoznaven pa, ker imata funkciji enak izhod. Vse to je razvidno iz bločnega diagrama.

(a) Transformirajte sistem, dobljen v (a) s podobnostno transformacijsko matriko

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Preverite rezultat iz točke (a) s pomočjo Matlaba.

(c) Narišite diagram poteka signalov za sistem dobljen, v točki (a).

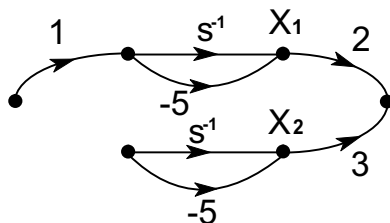
(d) Preverite spoznavnost ter vodljivost transformiranega sistema iz točke (b).

Rešitev

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 1] \mathbf{x} \\
 \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad ; \quad |\mathbf{P}| = 1 \quad ; \quad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{A}_v &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{B}_v &= \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{C}_v &= \mathbf{C} \mathbf{P} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = [2 \ 3] \\
 \dot{\mathbf{v}} &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 1] \mathbf{v}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (b) \quad \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C} = [1 \ 1] ; \\
 \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; \\
 \mathbf{P}_{\text{inv}} &= \text{inv}(\mathbf{P}) \\
 \mathbf{A}_v &= \mathbf{P}_{\text{inv}} * \mathbf{A} * \mathbf{P} \\
 \mathbf{B}_v &= \mathbf{P}_{\text{inv}} * \mathbf{B} \\
 \mathbf{C}_v &= \mathbf{C} * \mathbf{P}
 \end{aligned}$$

(c) Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 4.25.



Slika 4.25: Diagram poteka signalov iz primera 4.22d

$$\begin{aligned}
 (d) \quad |\mathbf{B} \ \mathbf{A} \mathbf{B}| &= \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\
 \begin{vmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C} \mathbf{A} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -10 & -15 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{Kot vidimo, je transformacija spre-} \\
 &\quad \text{nila notranjo strukturo sistema, vendar je sistem še vedno nespoznaven in} \\
 &\quad \text{nevodljiv.}
 \end{aligned}$$

Primer 4.23. *Dokažite, da za nevodljiv sistem velja, da je njegov transform s podobnostno matriko P ravno tako nevodljiv.*

Rešitev

Imamo sistem z matrikami A, B in podobnostno transformacijsko matriko P .

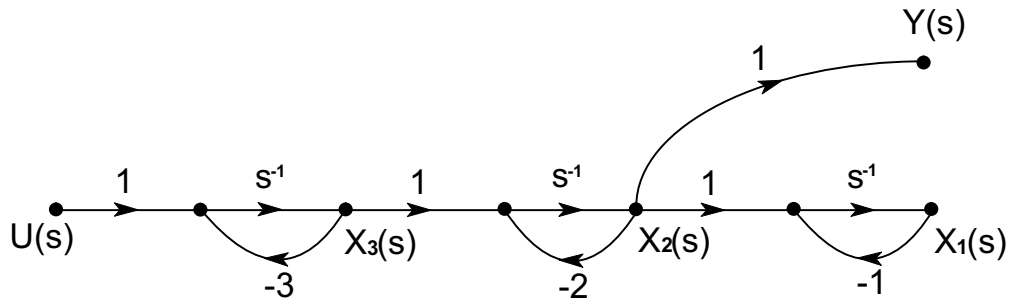
Za nestabilne sisteme velja: $|B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B| = 0$.

Če vzamemo: $A_v = P^{-1}AP$; $B_v = P^{-1}B$, dobimo $|B_v \ A_v B_v \ A_v^2 B_v \ \dots \ A_v^{n-1} B_v|$.

$$\begin{aligned} B_v &= P^{-1}B \\ A_v B_v &= (P^{-1}AP)P^{-1}B = P^{-1}AB \\ A_v^2 B_v &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AB) = P^{-1}A^2B \\ &\vdots \\ A_v^{n-1} B_v &= P^{-1}A^{n-1}B \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [B_v \ A_v B_v \ A_v^2 B_v \ \dots \ A_v^{n-1} B_v] &= P^{-1}[B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B] \\ |B_v \ A_v B_v \ A_v^2 B_v \ \dots \ A_v^{n-1} B_v| &= |P^{-1}| |B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B| \end{aligned}$$

Primer 4.24. *Upoštevajte diagram poteka signalov na sliki 4.26.*



Slika 4.26: Diagram poteka signalov iz primera 4.24

- Zapišite sistem v prostoru stanj.
- Poiščite korene karakteristične enačbe s pomočjo matrik iz točke (a).
- Izračunajte prenosno funkcijo sistema s pomočjo Masonove formule.

- (d) S pomočjo Matlaba preverite rezultate iz točke (c). Pomagajte si s sistemom iz točke (a).
- (e) Sistem je vodljiv. Ugotovite, ali je tudi spoznaven.
- (f) Vidimo, da je sistem zapisan v prostoru stanj tretjega reda, medtem ko je prenosna funkcija drugega reda. Iz strukture sistema ugotovite, ali je sistem spoznaven.

Rešitev

$$(a) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \quad y = [0 \ 1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$(b) \left| s\mathbf{I} - \mathbf{A} \right| = \begin{vmatrix} s+1 & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & 0 & s+3 \end{vmatrix} = (s+1)(s+2)(s+3) = 0$$

$$s = -1, -2, -3$$

$$(c) \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^{-2}(1+s^{-1})}{1-(-s^{-1}-2s^{-1}-3s^{-1})+2s^{-2}+3s^{-2}+6s^{-2}+6s^{-3}}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+1}{s^3+6s^2+11s+6} = \frac{1}{(s+2)(s+3)}$$

$$(d) \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = [0; 0; 1]; \quad \mathbf{C} = [0 \ 1 \ 0];$$

$$[\text{Gnum}, \text{Gden}] = \text{ss2tf}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, 0)$$

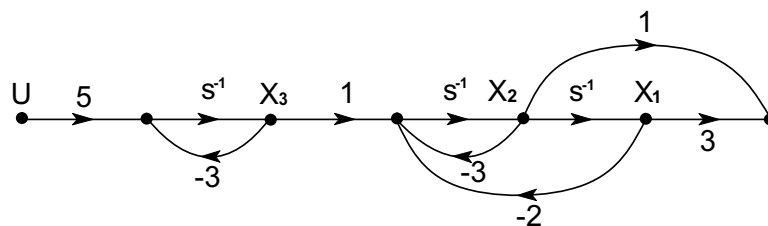
$$(e) \left| \begin{array}{c} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \mathbf{CA}^2 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{array} \right| = 0 \implies \text{nespoznaven}$$

- (f) Na sliki 4.26 vidimo, da stanje $X_1(s)$ ne vpliva na izhod $Y(s)$, torej je sistem nespoznaven.

Primer 4.25. Sistemu na sliki 4.8 zamenjajte prenosni funkciji $G_P(s)$ in $H(s)$ z naslednjima prenosnima funkcijama:

$$G_P(s) = \frac{5}{s+3}; \quad H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

Preverite vodljivost ter spoznavnost novega sistema.



Slika 4.27: Diagram poteka signalov iz primera 4.25

Rešitev

Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 4.27.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [3 \ 1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$|B \ AB \ A^2B| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & -30 \\ 5 & -15 & 45 \end{vmatrix} = 5 \cdot -25 \neq 0 \Rightarrow \text{vodljiv}$$

$$\begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0 \Rightarrow \text{nespoznaven}$$

Primer 4.26. Sistemu na sliki 4.8 zamenjajte prenosni funkciji $G_P(s)$ in $H(s)$ z naslednjima prenosnima funkcijama:

$$G_P(s) = \frac{s+1}{s(s+3)}; \quad H(s) = \frac{s+3}{s+1}.$$

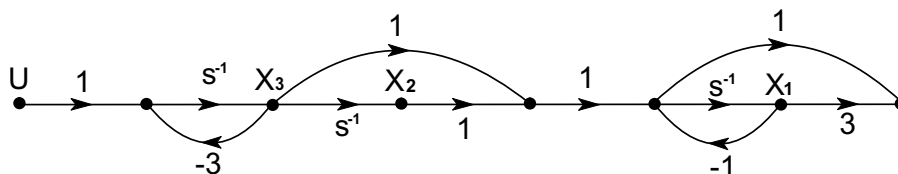
Preverite vodljivost ter spoznavnost novega sistema.

Rešitev

Diagram poteka signalov je prikazan na sliki 4.28.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [2 \ 1 \ 1] \mathbf{x}$$

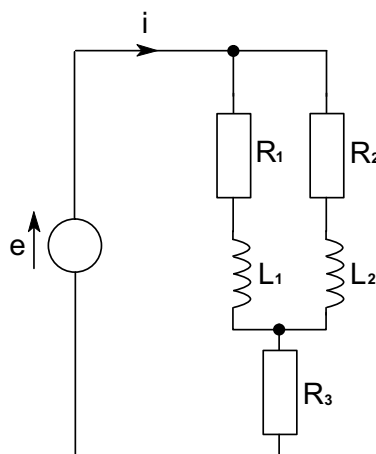
$$|B \ AB \ A^2B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{nevodljiv}$$



Slika 4.28: Diagram poteka signalov iz primera 4.26

$$\begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{nespoznaven}$$

Primer 4.27. Upoštevajte vezje na sliki 4.29.



Slika 4.29: Električno vezje iz primera 4.27

- Poiščite prenosno funkcijo $I(s)/E(s)$ za dano vezje.
- Vezje zapišite v prostoru stanj. Spremenljivki stanja naj bosta tokova skozi tuljavi.
- Določite razmerje upornosti ter induktivnosti elementov vezja, tako da bo sistem postal nevodljiv.
- Dokažite, da je pogoj iz (c) enak pogoju, ki je potreben, da lahko prenosno funkcijo, dobljeno v (a), reduciramo v prenosno funkcijo prvega reda.

Rešitev

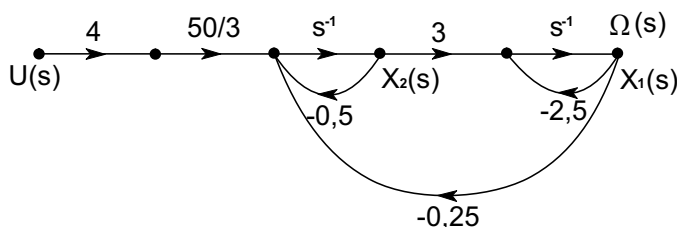
$$(a) Z(s) = \frac{(L_1 s + R_1)(L_2 s + R_2)}{(L_1 + L_2)s + (R_1 + R_2)} + R_3 = \frac{E(s)}{I(s)}$$

$$(b) \begin{aligned} e &= R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + R_3(i_1 + i_2) \\ e &= R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + R_3(i_1 + i_2) \\ \frac{di_1}{dt} &= -\frac{R_1 + R_3}{L_1} i_1 - \frac{R_3}{L_1} i_2 + \frac{1}{L_1} e \\ \frac{di_2}{dt} &= -\frac{R_3}{L_2} i_1 - \frac{R_2 + R_3}{L_2} i_2 + \frac{1}{L_2} e \end{aligned}$$

$$(c) \begin{vmatrix} \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1 + R_3}{L_1^2} & -\frac{R_3}{L_1 L_2} \\ \frac{1}{L_2} & -\frac{R_3}{L_1 L_2} & -\frac{R_2 + R_3}{L_2^2} \end{vmatrix} = \frac{R_1}{L_1^2 L_2} - \frac{R_2}{L_1 L_2^2} = 0 \implies \frac{R_1}{L_1} = \frac{R_2}{L_2}$$

$$(d) \begin{aligned} \frac{L_1 s + R_1}{(L_1 + L_2)s + R_1 + R_2} &= \text{konstanta} = K \\ L_1 &= K(L_1 + L_2) \implies K = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \\ R_1 &= K(R_1 + R_2) = \frac{L_1(R_1 + R_2)}{L_1 + L_2} \implies R_1 L_2 = L_1 R_2 \end{aligned}$$

Primer 4.28. Upoštevajte sistem, ki je dan z diagramom poteka signalov na sliki 4.30.



Slika 4.30: Diagram poteka signalov iz primera 4.28

- Določite prenosno funkcijo $\Omega(s)/U(s)$.
- Sistem zapišite v prostoru stanj.
- Načrtajte regulator za premikanje polov, če je želeni karakteristični polinom $\alpha_c(s) = (s + 5)^3$.
- Rešitev iz točke (c) preverite s pomočjo Matlab.
- S pomočjo Matlab preverite karakteristični polinom dobljenega sistema.
- Uporabite Matlab za izris odziva sistema na stopnico.

Rešitev

$$(a) \frac{\Omega}{U} = \frac{200s^{-1}}{1+0,5s^{-1}+2,5s^{-1}+1,25s^{-2}+0,75s^{-2}} = \frac{200}{s^2+3s+2}$$

$$(b) \dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2,5 & 3 \\ -0,25 & -0,5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{200}{3} \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = [1 \ 0] \mathbf{x}$$

$$(c) \mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} -2,5 & 3 & 0 \\ -0,25 & -0,5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{200}{3} \\ 0 \end{bmatrix} [K_1 \ K_2 \ K_3]$$

$$\mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a = \begin{bmatrix} -2,5 & 3 & 0 \\ -0,25 - \frac{200}{3}K_1 & -0,5 - \frac{200}{3}K_2 & -\frac{200}{3}K_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |s\mathbf{I} - \mathbf{A}_a + \mathbf{B}_a \mathbf{K}_a| &= \begin{vmatrix} s+2,5 & -3 & 0 \\ s+0,25+\frac{200}{3}K_1 & s+0,5+\frac{200}{3}K_2 & \frac{200}{3}K_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= s^3 + (3 + \frac{200}{3}K_2)s^2 + (2 + 200K_1 + \frac{500}{3}K_2)s + 200K_3 \\ &= (s+5)^3 = s^3 + 15s^2 + 15s + 125 \end{aligned}$$

$$K_3 = \frac{125}{200} = 0,625 \quad ; \quad K_2 = \frac{12}{200/3} = 0,18 \quad ; \quad K_1 = \frac{13-30}{200} = 0,2150$$

(d), (e), (f)

```
alphac=[1 15 75 125];
A=[-2.5 3 0; -0.25 -0.5 0; 1 0 0]; B=[0;200/3;0]; M=[0 0 1];
AB(1:3,1)=B; AB(1:3,2)=A*B; AB(1:3,3)=A*A*B;
K=M*inv(AB)*polyvalm(alphac,A)
Af=A-B*K; A=Af; B=[0;0;-1]; C=[1 0 0]; D=0;
eig(Af)
pause
step(A,B,C,D)
```

Literatura

- [1] Borrie, J.A. (1986): *Modern Control Systems: A Manual of Design Methods*, Prentice Hall, Inc., London, UK
- [2] Cook, P.A. (1986): *Nonlinear Dynamical Systems*, Prentice Hall, Inc., London, UK
- [3] D'Azzo, J.J., C.H. Houpis (1975): *Linear Control System Analysis and Design – Conventional and Modern*, McGraw-Hill, Inc., New York, USA
- [4] DiStefano, J.J., Stubberud, I.J. Williams (1976): *Feedback and Control Systems*, Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company, New York, USA
- [5] Franklin, G.F., J.D. Powell, A.E. Naeini (1986): *Feedback Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA
- [6] Kuljača, L., Z. Vukić (1985): *Automatsko upravljanje sistemima – analiza linearnih sistema*, Školska knjiga, Zagreb, HR
- [7] Kuo, B.C. (1991): *Automatic Control Systems*, Sixth edition, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA
- [8] McMillan, G.K. (1990): *Tuning and Control Loop Performance – A Practitioner's Guide (2nd ed.)*, Instrument Society of America, NC., USA
- [9] Ogata, K. (1990): *Modern Control Engineering*, Second edition, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, USA
- [10] Phillips, C., Harbor, R. (1996): *Feedback Control Systems (3rd ed.)*, Prentice Hall International, Inc., USA
- [11] *Problem Solver in Automatic Control Systems/Robotics*, Staff of Research and Education Association, New York, USA (1982)
- [12] Shinnars, S.M. (1978): *Modern Control System Theory and Applications*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts, USA

- [13] Shinnars, S.M. (1992): *Modern Control System Theory and Design*, John Willey & Sons, New York, USA
- [14] Shinskey, F.G. (1988): *Process Control Systems – Application, Design and Adjustment*, McGraw-Hill, New York, USA
- [15] Stojić, M.R. (1973): *Kontinualni sistemi automatskog upravljanja*, Građevinska knjiga, Beograd, YU
- [16] Šurina, T. (1981): *Automatska regulacija*, Školska knjiga, Zagreb, HR
- [17] Zupančič, B. (1995): *Zvezni regulacijski sistemi - II. del*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Univerza v Ljubljani, SLO
- [18] Zupančič, B. (1996): *Zvezni regulacijski sistemi, I.del*, Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, Univerza v Ljubljani, SLO

Učbenik **Zvezni regulacijski sistemi–primeri frekvenčne analize in sinteze sistemov vodenja** dopolnjuje in nadgrajuje tematiko učbenika Zvezni regulacijski sistemi - II. del in je namenjen vsem, ki bi radi osvojili temeljna znanja s področja regulacij, v prvi vrsti pa seveda študentom Avtomatike na FE. Tematika je razdeljena na štiri poglavja. Prvo poglavje obravnava analizo regulacijskih sistemov s pomočjo diagrama lege korenov. Drugo poglavje obravnava metode, ki zahtevajo poznavanje frekvenčne karakteristike. V tretjem poglavju obravnavamo prehitevalne, zakasnilne in prehitevalno - zakasnilne kompenzacijske metode za načrtovanje regulacijskih sistemov. Četrto poglavje pa opisuje analizo in sintezo sistemov v prostoru stanj.

Avtor

Igor Škrjanc je izredni profesor na Fakulteti za elektrotehniko v Ljubljani. Predava predmet Regulacijska tehnika (dodiplomski študij) in predmeta Izbrana poglavja iz teorije avtomatskega vodenja in Izbrana poglavja iz prediktivnega in adaptivnega vodenja (podiplomski študij). Vodi tudi vaje pri predmetih Regulacije I, Regulacije II, Simulacije, Regulacijska tehnika in seminarja Vodenje sistemov I in II. Njegova raziskovalna dejavnost pa je usmerjena na področje inteligentnih, prediktivnih in adaptivnih sistemov vodenja.